THESE de DOCTORAT D'ETAT

ès Sciences Physiques

présentée

à l'Université Pierre et Marie CURIE

- Paris VI -

---

par

Philippe BARRET

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES REGIMES VARIABLES DES TURBOALTERNATEURS DE GRANDE PUISSANCE

soutenue le 26 Novembre 1976 devant le jury composé de:

MM.	G. FOURNET	Président
	R. BONNEFILLE	Examinateurs
	B. FAVEZ	
	R. LACOSTE	
	Ch. RIOUX	

THESE de DOCTORAT D'ETAT

ès Sciences Physiques

présentée

à l'Université Pierre et Marie CURIE

- Paris VI -

---

par

Philippe BARRET

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES REGIMES VARIABLES DES TURBOALTERNATEURS DE GRANDE PUISSANCE

soutenue le 26 Novembre 1976 devant le jury composé de:

MM.	G. FOURNET	Président
	R. BONNEFILLE	Examinateurs
	B. FAVEZ	
	R. LACOSTE	
	Ch. RIOUX	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A ma mère

A ma femme

A mes enfants

avec toute mon affection

AVANT-PROPOS

La présente étude a été réalisée au sein de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France. Je dois à cette circonstance les facilités exceptionnelles qui m'ont été accordées pour expérimenter directement sur des turboalternateurs de grande puissance. Que mon Directeur Monsieur MAGNIEN en soit tout particulièrement remercié.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur FOURNET, qui a bien voulu accepter la présidence du Jury, pour les discussions très fructueuses que nous avons eues tout au long de la mise au point du présent mémoire.

Mes remerciements vont également à Monsieur FAVEZ et à Monsieur le Professeur RIOUX, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail dont ils ont bien voulu accepter d'être Rapporteurs.

Que Monsieur le Professeur BONNEFILLE et Monsieur le Professeur LACOSTE trouvent ici l'expression de ma reconnaissance pour l'honneur qu'il me font de participer au Jury de thèse.

J'exprime ma sincére gratitude à nos collègues Constructeurs, français et étrangers, qui nous ont fourni très complaisamment les plans et données constructives détaillés des machines, nécessaires à la mise en oeuvre des calculs.

Enfin je tiens à remercier tout particulièrement mes collaborateurs Madame ORANGE, Monsieur COLOT et Monsieur ROQUEFORT pour leur aide précieuse et soutenue au long des différentes étapes tant théoriques qu'expérimentales.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548114_0009

TABLE DES MATIERES

Pages

1ère PARTIE : ETUDE DES REGIMES VARIABLES EN HYPOTHESE DE PERMEABILITE CONSTANTE.

Notations. 1

1 - Introduction. 5

1.1. But général de l'Etude. 5

1.2. Structure du Rotor d'un Turboalternateur. 5

1.3. Méthode d'étude des régimes variables. 6

2 - Plan général de l'Etude en hypothèse de perméabilité constante et hypothèses de base. 13

2.1. Domaine de validité. 13

2.2. Méthode générale de calcul et hypothèses de base. 13

2.3. Schématisation géométrique de la coupe du rotor. 21

3 - Solution approchée des équations de Maxwell relativement à un pas dentaire du rotor (fer, cales et amortisseurs). 23

3.1. Choix des axes de coordonnées. 23

3.2. Pas dentaire de la zone bobinée. 23

3.3. Solution des équations de Maxwell dans la zone polaire. 40

3.4. Technologies particulières. 44

3.5. Raccordement entre la zone polaire et la zone bobinée. 45

4 - Expression des puissances actives et réactives pour un pas dentaire, dans les différentes régions. Impédances et schémas équivalents. 47

4.1. Puissances actives et réactives. 47

4.2. Schémas équivalents à inducteur ouvert, en valeurs réduites, sans prise en compte des effets d'extrémité. 50

4.3. Effets d'extrémité. 59

4.4. Couplage entre l'enroulement inducteur et les circuits massifs du rotor. 59

4.5. Expression des fonctions de transfert harmoniques. 65

5 - Application particulière de la méthode au calcul des pertes dues à une composante inverse de courant stator (avant prise en compte des effets d'extrémités). 69

5.1. Généralités ; méthode rigoureuse. 69

5.2. Méthode simplifiée. 70

2ème PARTIE : PRISE EN COMPTE DE LA SATURATION LORS DE L'ETUDE DES REGIMES VARIABLES.

1 - Prise en compte de la saturation lors du comportement du fer massif, en régime alternatif. 73

1.1. Introduction. 73

1.2. Equations traduisant le phénomène de pénétration. 74

1.3. Rappel de la solution en hypothèse de perméabilité constante. 75

1.4. Hypothèse d'une courbe de magnétisation rectangulaire. 76

1.5. Discussion des hypothèses adoptées. 78

1.6. Prise en compte d'une courbe de magnétisation plus réaliste. 79

1.7. Elaboration d'un modèle linéaire représentant la perméabilité en régime saturé. 83

1.8. Conclusion. 89

2 - Prise en compte de la saturation dans le cas des turbo-alternateurs. Etude particulière de la marche asynchrone. 91

2.1. Introduction. 91

2.2. Cas idéal du rotor cylindrique homogène, constitué par un matériau ferromagnétique. 91

2.3. Cas d'un rotor de turboalternateur. 92

2.4. Calculs itératifs en marche asynchrone. 95

2.5. Calcul des grandeurs caractérisant le régime asynchrone. 96

3ème PARTIE : COMPARAISON ENTRE LES RESULTATS DU CALCUL ET DES ESSAIS.

Introduction. 99

1 - Pertes en régime inverse des turboalternateurs. 101

1.1. Méthode expérimentale. 101

1.2. Résultats obtenus avec les différents turboalternateurs. 102

1.3. Conclusion d'ensemble du chapitre 1. 108

2 - Réponse en fréquence des turboalternateurs lors de petites perturbations. 111

2.1. Principe de la méthode expérimentale. 111

2.2. Résultats obtenus avec deux turboalternateurs. 113

2.3. Conclusion d'ensemble du chapitre 2. 114

3 - Fonctionnement asynchrone des turboalternateurs. 115

3.1. Intérêt de la connaissance de ce fonctionnement. 115

3.2. Modalités expérimentales. 116

3.3. Résultats obtenus avec différentes machines. 116

3.4. Conclusion relative au chapitre 3. 118

4 - Conclusion générale de la confrontation entre les résultats du calcul et des essais. 122

Figures. 123

ANNEXES

ANNEXE A - Influence de la courbure dans le schéma équivalent d'une machine à rotor massif cylindrique. A.175

A.1. Résumé et modalités d'application. A.175

A.2. Introduction. A.178

A.3. Résolution du champ dans l'entrefer. A.180

A.4. Résolution du champ dans le rotor. A.185

A.5. Choix des coefficients de correction de courbure, et schéma équivalent. A.190

A.6. Vérification numérique. A.194

ANNEXE B - Procédure de détermination des paramètres géométriques utilisés pour le calcul ____ B.215

B.1. Les quatre zones du rotor. ____ B.215

B.2. Schématisation d'un pas dentaire de zone bobinée. ____ B.216

B.3. Schématisation d'un pas dentaire de zone polaire. ____ B.217

ANNEXE C - Résolution du système d'équation donnant les différents coefficients de pénétration dans une dent et dans une encoche. ____ C.219

ANNEXE D - Calcul des puissances pour un pas dentaire. ____ D.223

D.1. Pas dentaire de la zone bobinée. ____ D.223

D.2. Pas dentaire de la zone polaire, muni d'amortisseurs et de cales amagnétiques. ____ D.228

D.3. Pas dentaire muni de cales magnétiques ou dépourvu de cales. ____ D.232

ANNEXE E - Prise en compte des effets d'extrémité. ____ E.245

E.1. Généralités. Buts poursuivis. ____ E.245

E.2. Méthode adoptée. ____ E.246

E.3. Effets d'extrémité relatifs aux phénomènes voisins de la surface du rotor. ____ E.246

E.4. Effets d'extrémité relatifs aux phénomènes sous les encoches. ____ E.259

ANNEXE F - Calcul des impédances des schémas équivalents à inducteur ouvert, en valeurs réduites. ____ F.265

F.1. Les valeurs réduites dans les machines synchrones. ____ F.265

F.2. Résolution du schéma équivalent d'axe direct, à inducteur ouvert. ____ F.270

F.3. Résolution du schéma équivalent d'axe en quadrature. ____ F.276

ANNEXE G - Calcul du phénomène de pénétration, dans un modèle à une dimension, en régime alternatif et en présence d'une courbe de magnétisation rectangulaire. ____ G.279

G.1. Allure de la loi de distribution de l'induction à un instant donné. ____ G.279

G.2. Résolution des équations de Maxwell. ____ G.280

G.3. Calcul des pertes actives. ____ G.283

G.4. Calcul des pertes réactives. ____ G.283

ANNEXE H - Calcul des pertes actives et réactives, en adoptant une courbe de magnétisation rectangulaire, et en supposant que le flux varie sinusoïdalement. ... H.287

H.1. Position du problème ... H.287

H.2. Solution pendant la première demi-période ... H.287

H.3. Solution pendant la deuxième demi-période ... H.288

H.4. Calcul de δ_s ... H.289

H.5. Calcul de P/S ... H.289

H.6. Calcul de Q/S ... H.289

H.7. Conclusion. ... H.290

Bibliographie ... H.291

1ère PARTIE

Etude des régimes variables en hypothèse de perméabilité constante

PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES DANS LA 1ère PARTIE

Nota : Etant donné le très grand nombre de symboles utilisés, la liste suivante, incomplète, a été établie dans le souci de se limiter, autant que possible, aux indications qui pourraient se révéler nécessaires au lecteur. A la suite de la nomenclature proprement dite, on trouvera la signification qu'il faut attribuer aux principaux indices utilisés.

1. Symboles

a_e	Longueur de dépassement de l'arbre
a_f	Longueur efficace de la frette
A_r	Densité linéique nominale de courant rotor
A_s	Densité linéique nominale de courant stator
$A_{ai}\ (i=1,2,3)$; $A_{ci}\ (i=1,2)$	Constantes d'intégration des équations de Maxwell
b_a	Largeur moyenne d'encoche de zone a
b_{a1} b_{a2} b_{a3}	Largeurs moyennes des régions d'encoche de zone a
b_c	Largeur moyenne d'encoche de zone c
b_{c1} b_{c2}	Largeurs moyennes des régions d'encoche de zone c
B (avec indice)	Induction magnétique
D_b	Diamètre sous encoche zone b (cf. fig.10)
D_d	Diamètre sous encoche zone d (cf. fig.10)
D_r	Diamètre rotor
D_s	Diamètre stator
e	Entrefer

e (avec indice)	Epaisseur efficace de la frette ou des amortisseurs sous frette, compte tenu de la profondeur de pénétration
f	Fréquence
f_d	Fonction d'excitation normée (fonction de p ou de $j\omega_0 g$)
g	Glissement ou pulsation réduite
g_d	Fonction d'excitation (fonction de p ou $j\omega_0 g$)
h_a	Profondeur d'encoche de zone a
h_{a1} h_{a2} h_{a3}	Profondeurs des régions d'encoche de zone a
h_c	Profondeur d'encoche de zone c
h_{c1} h_{c2}	Profondeurs des régions d'encoche de zone c
H (avec indice)	Champ magnétique
i_d i_q	Courants stator, d'axe direct et en quadrature, en valeur réduite
i_{fd}	Courant dans l'inducteur en valeur réduite
i_2	Courant inverse en valeur réduite
j	Opérateur des nombres complexes
J (avec indice)	Densité de courant
k, k_a	Coefficients caractérisant le rapport des résistances du rotor par unité de surface
k_b	Coefficient de bobinage stator
k_{ai} $(i=1,2,3)$ k_{ci} $(i=1,2)$	Constantes d'intégration des équations de Maxwell
k_{rp} k_{xp} $(p=1,2)$	Coefficients correcteurs de courbure
k_{1a} k_{1c} k_{ia} k_{ir} k_m k_{m8}	Coefficients intervenant dans l'évaluation des effets d'extrémité
l (avec indice)	Inductance
l_a l_c	Largeur moyenne de dent de zone a ou c
l_{a1} l_{c1}	Largeur moyenne de dent de région 1, de zone a ou c
n_s	Nombre de spires stator en série par pôle et phase
n'_s	Nombre de spires effectives stator en série par pôle et phase ($n'_s = n_s k_b$)

p — Opérateur Laplacien ou nombre de paires de pôles

p (avec indice) — Puissance active en valeur réduite

P (avec indice) — Puissance active en unités physiques

q (avec indice) — Puissance réactive en valeur réduite

Q (avec indice) — Puissance réactive en unités physiques

r — Variable des coordonnées cylindriques

r (avec indice) — Résistance en valeur réduite (peut être fonction de p ou de $j\omega_0 q$)

R (avec indice) — Résistance en unités physiques (peut être fonction de p ou de $j\omega_0 q$)

s (avec indice) — Section de région

S_n — Puissance apparente nominale

t_a t_c — Pas dentaire moyen des zones a et c

t_{a1} t_{c1} — Pas dentaire à la périphérie du rotor, en zone a ou c

t_b t_d — Pas dentaire à la périphérie des zones b et d

v (avec indice) — Tension en valeur réduite

x (avec indice) — Réactance en valeur réduite (peut être fonction de p ou de $j\omega_0 q$)

X (avec indice) — Réactance en unités physiques (peut être fonction de p ou de $j\omega_0 q$)

z (avec indice) — Impédance en valeur réduite (peut être fonction de $j\omega_0 q$)

α, β, γ (avec indice) — Coefficients d'amortissement complexes liés à la nature des matériaux, apparaissant lors de l'intégration des équations de Maxwell

δ (avec ou sans indice) — Profondeur de pénétration, obéissant à la formule générale

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \mu \omega_0 g}}$$

ε — Quotient de l'entrefer par le rayon rotor $\left(\varepsilon = \frac{2e}{D_r}\right)$

θ — Variable des coordonnées cylindriques

θ_a — Demi angle bobiné par pôle

θ_c — Demi angle non bobiné par pôle $\left(\theta_c = \frac{\pi}{2p} - \theta_a\right)$

μ	(avec ou sans indice)	Perméabilité relative
ρ		Résistivité du fer
ρ	(avec indice)	Résistivité des différents matériaux
ψ	(avec indice)	Flux magnétique en valeur réduite
ω		Pulsation en général
ω_o		Pulsation de base

2. Indices

a, b, c, d	Indice de zone (voir fig. 9)
i (= 1, 2, 3) j (= 5, 6, 7) k (= 0 à 7) chiffre de 0 à 8	Indices de région (voir fig. 10 et 11)
d	Axe direct
q	Axe en quadrature
o	- Homopolaire
	- Ou indice de région
	- Ou indique qu'une coordonnée à la valeur 0
m	Magnétisation
r	- Radial
	- Ou rotor
s	Stator
x, y, z	Relatifs aux coordonnées cartésiennes
θ	Tangentiel.

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 - BUT GENERAL DE L'ETUDE.

Ce travail est motivé par les difficultés de prise en compte du rotor massif dans l'étude du comportement des turbo-alternateurs en régime variable. La méthode adoptée est celle de l'analyse harmonique, consistant à considérer des perturbations sinusoïdales, à étudier le comportement des différentes parties de la machine en fonction de la fréquence, et à en déduire les transmittances harmoniques.

On a cherché à couvrir une gamme de fréquences aussi large que possible (ce qui, d'une part, permet de traiter une plus grande variété de problèmes, et d'autre part, facilite le passage ultérieur aux transmittances opérationnelles), à respecter la géométrie des différents matériaux afin de permettre une étude fine des phénomènes locaux, mais simultanément à simplifier au maximum le modèle mathématique, afin de le rendre plus aisément exploitable et de conserver à chaque élément du modèle une signification physique simple.

1.2 - STRUCTURE DU ROTOR D'UN TURBO-ALTERNATEUR.

Un turbo-alternateur est une machine synchrone triphasée, bipolaire ou quadripolaire. L'armature fixe ou stator joue le rôle d'induit. Elle porte un bobinage triphasé, dont la structure et les propriétés, notamment quant à la production d'un champ tournant, seront supposées connues.

L'armature tournante ou rotor, qui joue le rôle d'inducteur, est représentée dans le cas d'une machine bipolaire :

- en section droite (fig.1)
- en perspective cavalière, au voisinage d'une extrémité (fig. 2).

Sur la section droite (fig.1) on voit que le rotor est constitué d'un "corps" cylindrique en acier magnétique dans lequel sont creusées des encoches destinées à recevoir le bobinage inducteur. Ces encoches profondes n'occupent pas toute la périphérie, ce qui nous amènera à distinguer dans le rotor la "zone bobinée", où se trouvent les encoches profondes, et la "zone polaire". Sur la longueur de la partie active du rotor, le bobinage est maintenu contre la force centrifuge par des cales en métal amagnétique. Ces cales ne sont généralement pas d'un seul tenant sur toute la longueur, mais constituées de tronçons d'environ 20 à 30 cm de longueur. Cette cir-

constante soulève un problème délicat pour l'évaluation de la résistance électrique longitudinale du circuit des cales.

Sur la fig. 2 on aperçoit les "têtes de bobines" de l'inducteur. Les couches les plus profondes reposent sur une portion du rotor que nous appellerons "arbre". A la périphérie, ces têtes de bobines sont maintenues contre la force centrifuge par une "frette", cylindre en acier amagnétique de très grande résistance mécanique.

En régime variable des courants sont induits dans les cales et le fer du rotor, et souvent un enroulement "amortisseur" est intercalé entre l'inducteur et les cales (région 2 fig. 11). Cet enroulement se prolonge au-delà de la longueur de la partie active, entre les têtes de bobines et la frette, dans le but de fournir un chemin de fermeture préférentiel par la frette à ces courants. Cette disposition a été adoptée pour notre modèle mathématique, car bon nombre d'autres dispositions (amortisseurs situés seulement vers les extrémités, ou même absence totale d'amortisseurs), seront traitées aisément comme cas particuliers de celle-là.

A la périphérie de la zone polaire on peut trouver :

- l'absence d'encoches (cas de la fig. 1)

- des encoches peu profondes, contenant uniquement l'amortisseur et les cales (voir fig. 12) ; ces dernières peuvent être magnétiques ou amagnétiques.

Ces différentes possibilités ont été prises en compte dans notre étude.

Tout ce qui vient d'être dit s'applique aussi au rotor des alternateurs quadripolaires, dont un exemple de section droite est dessiné fig.3. Sur le plan de la description géométrique, et de la mise en équations mathématique, la seule différence réside dans le fait que la périodicité angulaire de structure est ici de $\pi/2$ au lieu de π dans le cas bipolaire.

1.3 - METHODE D'ETUDE DES REGIMES VARIABLES.

1.3.1 - Théorie des deux axes ; modèle classique.

L'étude des régimes variables des machines synchrones est classiquement effectuée au moyen d'une méthode appelée communément "théorie des deux axes" [1] [2] [3] (*). Cette méthode repose sur deux hypothèses : absence de saturation, permettant l'écriture de relations linéaires entre flux et courants, et distribution sinusoïdale, en fonction de l'angle θ des coordonnées cylindriques de la machine, de la distribution de force magnétomotrice du stator.

Très schématiquement, cette méthode consiste à effectuer sur les grandeurs relatives au stator un changement de variables substituant aux

---

(*) Les chiffres entre crochets se rapportent aux référence bibliographiques.

grandeurs de phases, d'indices a,b , c, des "grandeurs d'axes" d'indices d, q, o. Les grandeurs d'indice o n'existent qu'en présence de composante homopolaire. Quant aux grandeurs d'axes, elles peuvent être interprétées en considérant qu'aux enroulements du stator, fixes dans l'espace, ont été substitués deux enroulements d et q pseudo-stationnaires par rapport au rotor. Cette substitution est illustrée fig. 4a et 4b. ω' représente la vitesse de rotation du rotor (supposé bipolaire), l'indice f caractérise l'inducteur, les indices kd et kq des enroulements d'axe direct et en quadrature équivalant à l'ensemble des circuits amortisseurs.

Le comportement de la machine synchrone en régime variable est alors traduit par le système d'équations suivant dans lequel les grandeurs tensions v, flux ψ, courants i sont des fonctions de la variable de Laplace exprimées en valeurs réduites (*)(**).

(1)
$$\begin{cases} v_d = -p\psi_d - \omega'\psi_q - r_s i_d \\ v_q = -p\psi_q + \omega'\psi_d - r_s i_q \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} \psi_d = l_d(p)\, i_d + g_d(p)\, v_f \\ \psi_q = l_q(p)\, i_q \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} v_o = -p\psi_o - r_s i_o \\ \psi_o = l_o i_o \end{cases}$$

Les équations (1) sont appelées "équations de PARK".

Les équations (2) traduisent les relations entre flux et courants.

Les équations (3) n'interviennent que lorsqu'existe une composante homopolaire de courant, c'est-à-dire lorsque la somme des trois courants de phase n'est pas nulle. Cette circonstance n'interviendra pas dans notre étude.

Lorsque l'ensemble des circuits amortisseurs peut, effectivement, être représenté par deux circuits à constantes localisées, tels que les circuits kd et kq de la fig. 4, les fonctions $l_d(p)$ et $g_d(p)$ sont des fractions rationnelles dont le dénominateur est du 2ème degré en p, et la fonction $l_q(p)$ est une fraction rationnelle dont le dénominateur est du 1er degré en p. (voir notamment bibliographie[2] et [3]). L'étude des régimes variables à ω' constant peut alors être effectuée très simplement par le calcul opérationnel, et à ω' variable en utilisant divers auxiliaires de calcul (calculateur analogique ou digital).

En outre, si on peut admettre que le flux commun aux circuits d, f et kd pris deux à deux est le même, c'est-à-dire en particulier s'il n'y

---

(*) Pour la définition des valeurs réduites, voir Annexe F.

(**) Sauf indication contraire, les conventions de signes sont conformes aux recommandations de la publication C.E.I. 34.10 (1975): "Conventions relatives à la description des machines synchrones", convention "génératrice".

a pas de flux de fuites commun à l'inducteur et aux amortisseurs, ou autrement dit s'il n'y a pas de lignes d'induction bouclant l'inducteur et l'amortisseur sans traverser l'entrefer, les équations (2) peuvent être traduites par les schémas équivalents de la fig. 5. Dans ces schémas, les flux, courants et tensions sont les transformées de Laplace des expressions temporelles correspondantes, alors que les différentes inductances et résistances sont des constantes :

- l_{md} et l_{mq} sont des inductances de magnétisation
- l_s est l'inductance de fuites du stator
- l_{fd} est l'inductance de fuites de l'enroulement inducteur
- l_{kd} et l_{kq} sont les inductances de fuites des enroulements amortisseurs respectivement d'axe direct et en quadrature
- r_{fd}, r_{kd} et r_{kq} sont les résistances des enroulements correspondants

Les deux hypothèses conduisant des équations (2) aux schémas équivalents de la fig. 5, à savoir :

- circuits amortisseurs assimilables à deux circuits à constantes localisées,
- dans l'axe direct, absence de fuites magnétiques communes à deux enroulements mais n'intéressant pas le troisième,

constituent ce que nous appellerons le "modèle classique".

1.3.2 - Critique du modèle classique, notamment dans le cas des turbo-alternateurs.

Les critiques que l'on peut formuler à l'égard du modèle classique ont déjà été bien étudiées, notamment dans [4] à [12].

Contentons-nous de les résumer.

Tout d'abord, même dans le cas où le fer du rotor est feuilleté (donc ne transporte pas de courants longitudinaux) et où les circuits électriques du rotor sont bien localisés, l'hypothèse d'absence de fuites communes dans l'axe direct n'est généralement pas respectée.

Par exemple, dans le cas des turbo-alternateurs, il y a lieu de tenir compte d'une "inductance de fuites communes" entre l'enroulement inducteur et les autres circuits du rotor.

Le schéma équivalent de la fig. 5 a doit alors être modifié conformément à la fig. 6 ; l'inductance l_{fkd} traduit l'existence de "fuites communes" entre l'inducteur et l'amortisseur. Le principal effet de cette modification est de permettre une meilleure évaluation de l'amplitude des courants alternatifs induits dans l'enroulement inducteur lors des régimes variables. Mais la principale difficulté est surtout liée au fait que le fer du rotor des alternateurs est le plus souvent massif et qu'il l'est de façon systématique dans le cas des turbo-alternateurs de grande puissance auxquels nous nous intéressons dans cette étude.

De ce fait, outre son rôle premier, qui est d'offrir un chemin préférentiel au flux magnétique, le fer du rotor est également, en régime variable, le siège de courants électriques qui doivent être pris en compte dans l'expression des fonctions $\ell_d(p)$, $g_d(p)$, $\ell_q(p)$ des équations (2) ou dans l'établissement des schémas équivalents.

La principale complication résultant de cette prise en compte, provient du fait que, le fer étant massif, la distribution des courants n'y est pas uniforme et dépend considérablement de la nature des régimes variables. Par exemple, lors des phénomènes à variation rapide (ou à fréquence élevée), les courants dans le fer sont concentrés au voisinage de la périphérie du rotor alors que, lors des phénomènes à variation lente (ou à fréquence basse), les courants dans le fer intéressent des zones de plus en plus profondes.

Le fer ne peut donc être considéré comme un circuit à constantes localisées, et il en résulte que dans les équations (2) les fonctions $\ell_d(p)$, $g(p)$ $\ell_q(p)$ ne sont plus des fractions rationnelles et de ce fait le comportement de la machine ne peut plus être traduit par des schémas équivalents à coefficients constants tels que ceux des fig. 5 ou 6.

1.3.3 - Tentatives effectuées pour étudier le comportement des turbo-alternateurs en régime variable.

Lorsqu'il est nécessaire de tenir compte des phénomènes de pénétration dans les matériaux massifs, le comportement des machines électriques doit être étudié localement à partir des équations de Maxwell. Si on s'intéresse tout d'abord au cas où on peut supposer constante la perméabilité du fer (hypothèse "non saturée") les équations de Maxwell pour l'ensemble de la machine constituent un système différentiel linéaire à coefficients constants. Il est alors particulièrement commode de supposer que les lois de variation au cours du temps sont des lois sinusoïdales, car de ce fait on peut éliminer la variable temps grâce à l'utilisation des nombres complexes. Si on adopte une pulsation de référence ω_0 égale à la pulsation nominale des courants délivrés par l'alternateur, la pulsation des phénomènes électriques au rotor sera notée $\omega_0 g$; g est la "pulsation réduite" (ou le glissement en régime asynchrone), et il est connu que, dans ce cas, l'étude des régimes harmoniques s'effectue en remplaçant, dans les équations (1) à (3), l'opérateur p par la variable complexe $j\omega_0 g$.

Le problème se restreint alors à la détermination des quantités $\ell_d(j\omega_0 g)$, $g_d(j\omega_0 g)$, $\ell_q(j\omega_0 g)$ qui sont maintenant des fonctions complexes de la variable réelle g.

On sait que, si ces fonctions sont connues pour tout g $(0 < g < \infty)$, il est possible d'en déduire le comportement du rotor massif (et donc du turbo-alternateur) pour un régime variable dont la loi d'évolution au cours du temps soit absolument quelconque ; nous supposerons cependant que les phénomènes étudiés ne sont pas à variation tellement rapide qu'il faille prendre en compte les effets capacitifs à l'intérieur de la machine.

La géométrie extrêmement compliquée du rotor, telle qu'on peut l'observer par exemple fig. 1, fait que la résolution exacte des équations de Maxwell, même en hypothèse de variation sinusoïdale au cours du temps, présente d'énormes difficultés et n'a d'ailleurs jamais été réalisée à notre connaissance.

L'obstacle principal est naturellement la présence des "encoches" et des "dents" qui les séparent et, de ce fait, les principales tentatives jusqu'ici effectuées pour établir des modèles mathématiques de rotor de turbo-alternateurs peuvent se classer en deux catégories :

- celles où l'on a cherché à s'affranchir de la présence des dents et des encoches.

Une méthode [6] à [9] , puis [13] a consisté à considérer que le rotor est constitué de couches concentriques homogènes ; par exemple l'une de ces couches est constituée par le volume cylindrique compris entre le rayon inférieur et le rayon supérieur de l'enroulement inducteur ; les propriétés du matériau fictif constituant chaque couche (résistivité, perméabilité) sont fonction des constantes physiques des différents matériaux constituant la couche. Le problème est alors à symétrie cylindrique et les solutions des équations de Maxwell sont des fonctions de Bessel. Ce modèle présente deux inconvénients : d'une part, il ne permet pas l'analyse locale des phénomènes (conduisant à la connaissance des contraintes subies par le matériel), d'autre part, il néglige le fait que l'allure générale des lignes de champ est fortement distordue par la présence des dents du fait de leur grande perméabilité (cf. fig. 8) et du fait que cette distorsion évolue considérablement avec la fréquence, il n'est pas exact de considérer des perméabilités et résistivités moyennes indépendantes de la fréquence.

Une autre méthode [10] a consisté à ignorer simplement les courants véhiculés par les dents, autrement dit à raisonner comme si les dents étaient feuilletées, et à ne considérer comme massive que la portion du rotor sous les dents. Bien sûr, ce modèle est encore plus sommaire que le précédent, et présente les mêmes inconvénients.

- celles où l'on a tenu compte de la présence des dents.

Les deux principaux modèles existants sont de complexité extrêmement différente.

Dans le premier modèle [4] [5] le fer massif est considéré de façon globale, et il est pris en compte par l'adjonction de branches supplémentaires aux schémas équivalents des fig. 6 et 5b. La principale adjonction est celle d'une impédance complexe en parallèle avec la réactance de magnétisation. Le module de cette impédance est déterminé par la profondeur de pénétration dans le fer et par le volume de fer concerné, son argument est déterminé par le degré de saturation.

Dans le deuxième modèle [11] , le fer massif ainsi que les autres matériaux constitutifs sont divisés en de plus nombreuses zones (c'est également une caractéristique de la méthode proposée dans la présente étude). Chaque zone est considérée comme un circuit, couplé avec les autres, dont les paramètres varient avec la fréquence.

L'inconvénient principal de ces deux méthodes réside dans le fait que la distribution du champ dans le fer, et notamment dans les dents, est imposée a priori, selon un modèle très simplifié inspiré de la théorie de la pénétration appliquée à des domaines de beaucoup plus grandes dimensions. Il en résulte que, notamment aux fréquences assez basses pour que la profondeur de pénétration dans le fer devienne égale ou supérieure à la largeur des dents, la distribution résultant de ces méthodes est inexacte.

Si nous essayons de situer la présente étude par rapport à ces différentes tentatives, nous pouvons dire que le but principal poursuivi est d'obtenir une représentation de la distribution du champ et du courant dans le rotor massif, en respectant aussi fidèlement que possible la géométrie des divers matériaux. Les étapes sont les suivantes:

- Résolution approchée des équations de Maxwell dans les différentes zones, conduisant à des expressions analytiques simples du champ et du courant en tout point.

- A partir de ces expressions, calcul local puis par zone des puissances active et réactive, d'où l'accès d'une part aux phénomènes locaux, d'autre part aux réponses fréquentielles permettant l'analyse du comportement, en régime variable, de la machine dans son ensemble.

Les grandes lignes de cette méthode, ainsi que quelques-uns des premiers résultats qu'elle a permis d'obtenir, sont exposés en [14]

Chapitre 2

PLAN GENERAL DE L'ETUDE EN HYPOTHESE DE PERMEABILITE CONSTANTE ET HYPOTHESES DE BASE

2.1 - DOMAINE DE VALIDITE.

Par "hypothèse de perméabilité constante" on entend les régimes au cours desquels le champ et l'induction peuvent être considérés comme proportionnels ; cette hypothèse s'étend également à l'étude des "petites variations" autour d'un régime même saturé : ce sont alors les variations de champ et d'induction qui peuvent être considérés comme proportionnelles.

En ce qui concerne les grandes machines synchrones, dont le régime de fonctionnement normal est fortement saturé, cette hypothèse se trouve vérifiée dans deux sortes de fonctionnement :

- des régimes d'essais non saturés (courants et tensions très inférieurs aux valeurs normales) : l'induction et le champ peuvent être considérés comme proportionnels ;

- lorsqu'on s'intéresse à de petites variations autour d'un régime de fonctionnement synchrone : les variations d'induction et de champ peuvent être considérées comme proportionnelles. La perméabilité correspondante est alors la tangente à la courbe de magnétisation du matériau au point de fonctionnement considéré. Les problèmes pouvant être traités dans cette hypothèse sont :

  - Contraintes dues aux déséquilibres permanents (composante inverse de courant superposée au régime de fonctionnement normal),

  - Réponses fréquentielles de la machine en vue d'étudier la stabilité statique et le réglage optimal des paramètres du système d'excitation,

  - Pertes à la surface du rotor dues aux harmoniques ; cependant la validité du modèle mathématique proposée est limitée aux valeurs de g comprises entre $g = 0$ et $g \simeq 2$ (voir Annexe C). La possibilité de l'utiliser pour ce dernier problème n'est donc pas assurée.

2.2 - METHODE GENERALE DE CALCUL ET HYPOTHESES DE BASE.

2.2.1 - Généralités sur la méthode de calcul.

Ainsi que cela a été annoncé au § 1.3.3., du fait que le rotor des turboalternateurs comporte des matériaux massifs et notamment du fer, l'étude du comportement en régime variable nécessite l'utilisation et la résolution des équations de Maxwell.

Une solution rigoureuse de ce problème serait d'une grande complexité, à cause de la géométrie compliquée du rotor et de la grande différence de perméabilité magnétique entre le fer et les autres matériaux. D'autre part, cette étude s'applique essentiellement aux régimes transitoires pour lesquels une grande précision n'est pas requise.

La méthode proposée ici consiste à rechercher une solution approchée des équations de Maxwell dans le rotor, réalisant un compromis aussi équilibré que possible entre la simplicité des expressions mathématiques, nécessaire pour en faire un outil maniable et une précision suffisante pour l'étude des régimes transitoires.

Une telle démarche a évidemment nécessité, au cours de son élaboration, le choix d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices dont le bien-fondé ne peut, en général, pas être rigoureusement prouvé. Dans la suite de cet exposé on s'efforcera cependant d'expliquer les raisons du choix des principales hypothèses, soit par un raisonnement mathématique, soit par des considérations physiques, soit par l'évaluation de l'ordre de grandeur des quantités négligées.

En dernière étape, et bien que cela ne puisse évidemment constituer une preuve de validité, la comparaison avec des résultats de mesures effectuées sur des turboalternateurs de tailles et de technologies différentes permettra une estimation du degré de précision du modèle mathématique et, éventuellement, de ses limites d'utilisation.

2.2.2 - Impédances harmoniques selon les deux axes.

On utilise la méthode de décomposition selon les deux axes, dont les hypothèses sont toujours respectées (distribution sinusoïdale de f.m.m. au stator et relations linéaires entre flux et courants).

Les équations (1) à (3) sont donc utilisables ici. Nous admettrons, lors de la 2ème partie, qu'elles peuvent également être utilisées en régime saturé, moyennant quelques aménagements lors des opérations de superposition.

Dans ces conditions, le calcul des fonctions $\ell_d(p)$ et $g_d(p)$ d'une part, $\ell_q(p)$ d'autre part, peut être effectué séparément, en supposant le rotor sollicité d'une part par un champ magnétique purement d'axe direct, d'autre part par un champ magnétique purement d'axe en quadrature.

En outre, comme nous nous intéressons à la réponse fréquentielle, la sollicitation considérée est sinusoïdale et de pulsation $\omega_o g$, conduisant donc, comme nous l'avons déjà annoncé au § 1.3.3. à la connaissance des fonctions complexes $\ell_d(j\omega_o g)$, $g_d(j\omega_o g)$, $\ell_q(j\omega_o g)$.

La méthode usuelle d'écriture des équations (2) dans ce cas, et de leur représentation par des schémas équivalents tels que ceux de la fig.5, consiste à multiplier par $j\omega_o$ d'une part les fonctions ℓ_d, g_d, ℓ_q ainsi que les impédances élémentaires qui les composent, d'autre part les flux. Il faut voir dans cette opération uniquement un changement d'échelle, dont la commodité sur le plan pratique résulte simplement de l'obtention d'ordres de grandeurs numériques plus familiers à l'utilisateur.

Les inductances harmoniques $\ell_d(j\omega_o g)$ et $\ell_q(j\omega_o g)$ deviennent alors des impédances harmoniques et on pose : (*)

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{z}_d(j\omega_o g) = j x_d(j\omega_o g) = j\ell_d \omega_o (j\omega_o g) \\ \mathfrak{z}_q(j\omega_o g) = j x_q(j\omega_o g) = j\ell_q \omega_o (j\omega_o g) \end{cases}$$

Les équations (2) deviennent alors, dans ces conditions :

$$(5)\qquad \begin{cases} j\omega_o \psi_d = j x_d(j\omega_o g)\, i_d + j\omega_o g_d(j\omega_o g)\, v_f \\ j\omega_o \psi_q = j x_q(j\omega_o g)\, i_q \end{cases}$$

mais, bien entendu, les quantités complexes ψ, i, v, représentent toujours des grandeurs variant à la pulsation $\omega_o g$.

2.2.3 - Méthode d'établissement des schémas équivalents : hypothèses relatives à la branche magnétisante et à la branche "inducteur".

Nous allons nous référer à la méthode classique de calcul des paramètres des machines dont le fer est feuilleté au stator et au rotor, et dont les enroulements sont localisés ; c'est en effet par rapport à ce modèle que pourront être expliquées les hypothèses essentielles de la présente étude.

2.2.3.1. Principe du calcul des impédances propres et mutuelles par la méthode classique.

Nous allons donc adopter, comme base d'explication, une telle machine, pour laquelle nous supposerons un nombre réduit d'enroulements au rotor, ceci dans le but de simplifier l'exposé.

Nous supposons donc (fig. 7) une machine à entrefer constant, en représentation bipolaire.

L'enroulement stator est supposé créer une f.m.m. à distribution sinusoïdale en fonction de θ ; c'est un enroulement classique à champ tournant. On suppose qu'on cherche à établir le schéma équivalent d'axe d ; pour cela la distribution de f.m.m. stator doit avoir son maximum au droit de l'axe d , (d'où le changement de sens des courants stator de part et d'autre de ces axes).

Au rotor, toujours en vue de simplifier l'exposé, on se contente de considérer deux circuits dont les conducteurs sont logés dans des encoches. Ces circuits seront supposés fermés sur eux-mêmes, à la façon des

(*) Dans toute cette étude, on n'affectera les nombres complexes d'aucun signe distinctif particulier.

circuits amortisseurs des machines synchrones ou des cages d'écureuil des moteurs asynchrones, par exemple au moyen de "couronnes de court-circuit".

Le circuit rotorique n° 1 comporte d'abord un conducteur situé à l'angle θ_1 . Pour l'étude du schéma d'axe direct le conducteur de retour qui lui est associé est situé à l'angle $\frac{\pi}{p} - \theta_1$ (voir fig. 7 avec $p = 1$), mais cette spire est normalement jumelée avec celle dont les conducteurs sont aux angles $-\theta_1$ et $-\left(\frac{\pi}{p} - \theta_1\right)$.

Pour l'étude des interactions magnétiques, cet ensemble de 4 conducteurs peut être considéré comme un "circuit" et sera par la suite caractérisé comme tel.

De même pour le circuit rotorique n° 2, avec les conducteurs situés aux angles θ_2 , $\frac{\pi}{p} - \theta_2$, $-\theta_2$, $-\left(\frac{\pi}{p} - \theta_2\right)$.

Les paramètres caractéristiques du système sont simplement les impédances propres et mutuelles des circuits.

Le calcul de la partie imaginaire (réactances) de ces impédances passe par l'analyse du champ magnétique, conduisant aux flux bouclés par les différents circuits. Dans le modèle "classique" analysé ici, le fer étant feuilleté et supposé en outre de grande perméabilité, la portion la plus intéressante des lignes de champ magnétique correspond aux traversées de l'entrefer ou des encoches ; la circulation du champ le long des lignes de force réelles est due de façon prépondérante à ces traversées, d'où résulte la pratique habituelle de calculer séparément la contribution aux réactances d'une part des traversées d'entrefer, donnant lieu aux réactances "de magnétisation", d'autre part des traversées d'encoches, donnant lieu aux réactances "de fuites". Pour ces calculs dissociés on applique le théorème d'Ampère à la circulation du champ le long de contours fermés dont la seule partie correspondant aux vraies lignes de champ (et donnant lieu à une contribution non négligeable aux réactances) est relative aux traversées des espaces d'air, par des trajets orthogonaux aux surfaces en regard. Les contours associés aux traversées d'entrefer sont tels que H_m fig. 7. Notons que ces derniers représentent assez bien les trajets réels du champ dans le fer et qu'en conséquence ils permettent d'évaluer l'influence de la saturation sur les réactances de magnétisation.

Les contours associés aux traverses d'encoche sont tels que H_δ , H_1 ou H_2 fig. 7.

L'impédance propre de chaque circuit se compose alors :

- de sa résistance,
- de la réactance "de magnétisation" correspondant aux traversées d'entrefer et permettant en outre la prise en compte de la saturation (contours d'intégration tels que H_m fig. 7),
- de la réactance "de fuites" correspondant aux traversées d'encoches (contours d'intégration tels que H_δ , H_1 , H_2 fig. 7).

L'impédance mutuelle entre deux circuits est une réactance pure, correspondant aux seules traversées d'entrefer.

Indiquons maintenant le principe du calcul des différentes réactances toujours en restant dans le cadre du modèle classique (circuit magnétique entièrement feuilleté et circuits électriques localisés dans les encoches) ; une bonne partie des considérations qui vont suivre sera reprise dans le cas du rotor massif, en raison des hypothèses simplificatrices qui seront adoptées.

La réactance de magnétisation propre au stator se calcule en supposant une distribution sinusoïdale du champ radial dans l'entrefer. Cette hypothèse est assez bien vérifiée du fait que la f.m.m. est à distribution sinusoïdale et que l'entrefer est constant. La présence au rotor d'encoches de profondeurs différentes (voir fig. 1) n'introduit qu'une erreur faible par rapport à cette hypothèse ; par exemple dans le cas des turboalternateurs, cette particularité se traduit par une différence de l'ordre de 10 % entre x_{md} et x_{mq} ce qui est acceptable.

La réactance mutuelle entre le stator et l'un des circuits du rotor (caractérisé par l'angle θ_1 ou θ_2) s'obtient en calculant l'influence du même champ créé par le stator ; ce sera donc une constante affectée d'un coefficient multiplicateur cos θ_1 ou cos θ_2 (cos $p\theta_1$ et cos $p\theta_2$ dans le cas d'une machine multipolaire). Le calcul complet sera fait en annexe F.

La réactance de magnétisation propre à un circuit du rotor, par exemple celui caractérisé par l'angle θ_1 , se calcule en supposant ce circuit seul alimenté. La distribution de champ radial d'entrefer est alors non plus sinusoïdale mais uniforme dans l'intervalle θ_1 , $\pi - \theta_1$ (θ_1 , $\frac{\pi}{p} - \theta_1$ dans le cas d'une machine multipolaire), et dans les intervalles homologues et nulle en dehors. Ces réactances feront donc apparaître une même constante affectée d'un terme multiplicateur $\pi - 2\theta_1$, $\pi - 2\theta_2$, etc... (ou $\frac{\pi}{p} - 2\theta_1$, $\frac{\pi}{p} - 2\theta_2$, etc..) caractérisant le développement angulaire du circuit.

Le calcul de la réactance de fuites propre au stator se ramène au calcul du champ transversal aux encoches du stator. Comme le fer de ce dernier est feuilleté, le calcul ne présente aucune difficulté. Les formules se trouvent dans les Cours de Construction de Machines ou encore (par exemple) dans [4]. Dans les applications numériques, cette grandeur est fournie par le Constructeur en même temps que les autres paramètres de la machine considérée.

Le calcul de la réactance de fuites propre à un circuit du rotor se ramène au calcul du champ de l'encoche considérée isolément et parcourue par son courant (voir fig. 7). Si le fer du rotor est supposé feuilleté, le calcul se ramène à celui du champ transversal dans l'encoche, en utilisant pour fermer le contour d'intégration un contour le long duquel la circulation du champ peut être considérée comme négligeable, du fait de la grande perméabilité du fer. Il en résulte en particulier que si, par exemple, les deux circuits associés aux emplacements angulaires θ_1 et θ_2 sont logés dans des encoches identiques et remplies identiquement, leurs résistance et réactance de fuites seront identiques, donc indépendantes de la position angulaire.

2.2.3.2. Application au calcul des impédances du rotor massif, en supposant l'enroulement inducteur ouvert. Hypothèse relative à la réactance de magnétisation.

Nous supposons pour le moment l'inducteur à circuit ouvert. Nous devons donc prendre en compte les éléments massifs du rotor : le fer, les amortisseurs et les cales d'encoches, et nous supposons que le rotor comporte autant de circuits analogues à ceux décrits au § 2.2.3.1. qu'il y a d'encoches par demi-pôle : l'intervalle angulaire occupé par chacun de ces circuits est donc le "pas dentaire".

Notre hypothèse consiste à supposer qu'il est possible, comme ci-dessus, de considérer séparément les réactances de magnétisation et les réactances de fuites.

Nous allons d'abord exposer la mise en oeuvre et les avantages de cette hypothèse, puis sa justification.

On considère que le champ dans l'entrefer, au voisinage du rotor, est caractérisé par sa composante radiale et sa composante tangentielle, variant avec l'angle θ . (pour fixer les idées, dans le cas d'un rotor isotrope, en supposant que le champ créé par le stator a son maximum au droit de l'axe d et que l'origine des angles est au droit de l'axe q , la composante radiale varie en $\sin p\theta$ et la composante tangentielle en $\cos p\theta$; dans le cas du rotor de turbo-alternateur, et en faisant abstraction des perturbations locales dues à l'alternance des encoches et des dents, les lois de distribution ont même allure, tout en n'étant plus tout à fait sinusoïdales ; on est en tous cas en droit de considérer que leur variation est faible sur le petit intervalle angulaire constitué par un pas dentaire).

La composante tangentielle au voisinage du rotor est nulle en l'absence de courants rotoriques, on considère donc qu'elle est directement liée à l'existence de ces courants et on va chercher à calculer ces courants en considérant uniquement l'influence de cette composante. On considère donc fig. 8 un pas dentaire, entre les points A et B on suppose appliqué un champ tangentiel de valeur moyenne $\overline{H}_t$ à variation sinusoïdale dans le temps, et on étudie la pénétration dans le secteur OAB . La fig. 8 donne une image approximative des lignes de force associées. Les avantages de cette simplification sont les suivants :

- les symétries du problème entraînent des simplifications dans les expressions analytiques,

- les lignes de force associées à ce modèle simplifié traversent orthogonalement les frontières OA et OB , si bien qu'en application du théorème d'Ampère au contour OAB la quantité $\overline{H}_t \times AB$ est égale au courant total dans le secteur OAB .

- il suffit de faire une fois le calcul pour tous les pas dentaires de même géométrie ; or on peut se ramener à deux variantes : l'une dans la zone bobinée et l'autre dans la zone polaire.

Le résultat du calcul s'exprime soit sous forme de puissance active et réactive (proportionnelles à $|\overline{H}_t|^2$), soit sous forme de résistance et de réactance que l'on considérera comme la résistance et la réactance de fuites associées au pas dentaire considéré.

La composante radiale du champ dans l'entrefer au voisinage du rotor est, par contre, supposée associée uniquement aux "réactances de magnétisation". On considère que la contribution du fer à ces réactances reste toujours faible devant la contribution de l'entrefer, et on attribue à ces réactances les valeurs calculées selon la méthode du § 2.2.3.1. (on peut donc tenir compte de la saturation du circuit magnétique).

La principale critique qu'on peut apporter à cette simplification concerne la séparation des influences sur le rotor de la composante radiale et de la composante tangentielle du champ dans l'entrefer au voisinage du rotor.

Dans la portion du pas dentaire comportant encoche et dent (zones a ou c fig. 10, 11, 12), la justification est basée sur la contribution respective des différentes régions à la puissance active et à la puissance réactive, ou encore à la résistance et à la réactance ; la contribution de l'encoche est toujours prépondérante devant celle de la dent ; or, dans l'encoche, même dans le cas présent de dents massives, le champ est toujours sensiblement transversal, et correspond bien à l'hypothèse d'une contribution de la seule composante tangentielle du champ dans l'entrefer.

La composante radiale du champ dans l'entrefer, par contre, tend à pénétrer préférentiellement par les dents, et c'est dans ces régions que sa non prise en compte est la principale source d'erreur. La justification réside donc essentiellement dans le fait que la contribution des dents est numériquement toujours faible, d'une part devant celle de l'entrefer en ce qui concerne l'influence de la composante radiale du champ d'entrefer, d'autre part devant celle des encoches en ce qui concerne l'influence de la composante tangentielle du champ d'entrefer. Pour cette dernière influence par exemple, les calculs ont montré que la contribution des dents à la réactance de fuites est toujours inférieure à 10 % de la contribution des encoches. Pour la résistance la contribution est encore plus faible lorsque les cales sont très conductrices ; la valeur de 10 % a été cependant légèrement dépassée dans le cas de cales en acier amagnétique (donc de résistivité élevée).

Une dernière remarque est relative au fait que l'application d'une différence de potentiel magnétique entre A et B fig. 8 donne naissance à un champ non purement tangentiel, mais légèrement distordu par l'existence des encoches et des dents, donc affecté d'une petite composante radiale dont l'effet est de produire des lignes de force - non dessinées fig. 8 - se refermant dans l'entrefer au droit de l'encoche, entre les extrémités de dents voisines. Ce phénomène est connu et donne lieu à une réactance supplémentaire "de bec d'encoche" dont nous avons tenu compte.

Si on considère alors l'ensemble de la machine et non plus un seul pas dentaire, les variations "macroscopiques" du champ radial et du champ tangentiel seront prises en compte par l'interaction des différents circuits, selon la méthode annoncée au § 2.2.3.1. et qui sera développée au § 4.2.

Dans la portion du pas dentaire située dans l'encoche (zone b ou d fig. 10, 11, 12), constituée par un secteur de cylindre plein, on se trouve dans des conditions analogues au cas du rotor cylindrique homogène ; le problème a été entièrement traité en annexe A ; dans cette étude on a établi un modèle mathématique de rotor cylindrique dans lequel l'influence du champ radial et du champ tangentiel dans l'entrefer sont dissociées. Ce modèle est, évidemment, lui aussi, approximatif, mais on a pris soin de vérifier que les résultats numériques présentent une concordance satisfaisante avec la solution rigoureuse obtenue à l'aide des fonctions de Bessel.

2.2.3.3. Structure des schémas équivalents.

La méthode ci-dessus conduit, dans chaque axe, à un schéma équivalent à branches nombreuses, les impédances de ces branches étant, en régime harmonique, fonction de g.

On montrera que ces schémas équivalents peuvent très facilement se ramener à des structures simples telles que celle dessinée fig. 6, pour l'axe direct, et fig. 5b, pour l'axe en quadrature, et qui se présenteront conformément à la fig. 9 a, relative à l'axe direct, et à la fig. 9 b, relative à l'axe en quadrature. La simplicité d'obtention de ces structures est un nouvel avantage à mettre à l'actif des hypothèses du § 2.2.3.2.

Dans ces schémas x_{rd} , r_{rd} , x_{rq} , r_{rq} sont les impédances associées aux circuits massifs dont le calcul constitue l'objet premier de la présente étude ; x_s , x_{md} , x_{mq} , x_{fd} sont respectivement les réactances usuelles de fuites stator, de magnétisation dans l'axe direct et en quadrature, de fuites rotor ; r_{fd} est la résistance de l'inducteur.

2.2.3.4. Hypothèse relative à la branche "inducteur".

Si on suppose que l'enroulement inducteur est à circuit ouvert (r_{fd} infini), les schémas des fig. 9 a et b ont une structure identique, et les réactances x_{rd} et x_{rq} ainsi que les résistances r_{rd} et r_{rq} sont obtenues à partir de l'analyse de la pénétration du champ dans des associations de matériaux massifs.

Dans l'axe direct, lorsque l'enroulement inducteur est fermé, soit sur lui-même, soit sur une résistance extérieure, soit sur une source d'excitation (tension v_{fd} de la fig. 9 a), nous le prendrons en compte en considérant, outre sa résistance r_{fd} , d'une part sa réactance de fuites propres x_{fd} calculée comme si le fer du rotor était feuilleté (cette réactance est une des données fournies par le Constructeur ; la même remarque qu'en 2.2.3.1. à propos de la réactance de fuites stator s'applique ici), et d'autre part par sa réactance de fuites communes avec les autres circuits rotoriques x_{rfd} qui sera calculée au § 4.4. en évaluant le flux reçu par l'inducteur à circuit ouvert et dû aux courants dans les autres circuits du rotor. Cette méthode de prise en compte repose sur l'hypothèse (adoptée par ailleurs dans toutes les autres études sur le rotor massif) que le champ dû à l'inducteur ne perturbe pas sensiblement la loi de distribution du champ et des courants dans les autres matériaux massifs. Cette éventuelle perturbation concerne surtout les dents, et la justification de

cette hypothèse, comme de celle du paragraphe précédent, repose surtout sur le fait que la contribution des dents aux impédances de la machine est relativement faible au regard de la contribution de l'entrefer et des encoches.

On pourra constater, lors des vérifications expérimentales, que cette hypothèse semble donner des résultats satisfaisants, tant en ce qui concerne le comportement de l'inducteur lui-même que celui de la machine dans son ensemble. Elle présente en outre l'avantage que la tension v_{fd} apparaît explicitement dans le schéma équivalent, ce qui permet l'appréhension directe de la transmittance $g_d(j\omega_0 g)$ dont on a besoin pour les problèmes de réglage, notamment de réglage de tension.

2.3 - SCHEMATISATION GEOMETRIQUE DE LA COUPE DU ROTOR.

L'encochage des turbo-alternateurs de grande puissance présente une géométrie extrêmement compliquée que l'on schématise comme il est indiqué sur les fig. 10, 11 et 12.

La fig. 10 a été dessinée dans le cas d'un rotor bipolaire ($p = 1$) ; cependant l'extension à $p = 2$ ne présente pas de difficulté.

Sur la fig. 10 le rotor est divisé en 4 zones : a et b correspondant à la zone bobinée, c et d correspondant à la zone polaire. Les hauteurs h_a et h_c sont égales à la profondeur des encoches dans les zones correspondantes. La séparation entre les zones est en outre caractérisée par le demi-arc bobiné θ_a (angle géométrique).

Sur la fig. 11 est indiquée la schématisation d'un pas dentaire dans la zone bobinée. Les régions 1, 2 et 3 correspondent respectivement aux cales, amortisseur, inducteur. Les régions 5, 6 et 7 sont les régions des dents en regard de 1, 2, 3, respectivement. La région 4 correspond au voisinage de la surface extrême de la dent. Sa prise en compte est nécessitée par les simplifications apportées plus loin dans la résolution des équations de Maxwell, et elle sera exposée plus en détail au § 3.2.3.3. On peut cependant en donner une justification qualitative par l'observation des lignes de champ esquissées fig. 8 : les lignes de champ dans ce voisinage sont à prépondérance tangentielle et correspondent à une profondeur de pénétration plus faible que dans la cale ; d'autre part, à la frontière avec la cale, elles rencontrent un milieu de perméabilité plus faible, ce qui entraîne leur incurvation au coin de la dent : tout se passe comme si le flux avait tendance à être canalisé le long du flanc de dent plutôt que de traverser l'encoche de plus grande réluctance. Les conditions de raccordement étudiées en 3.2.3.3. font appel à ce phénomène de "contournement", ce qui explique que fig. 11 on ait représenté la limite entre les régions 4 et 5 par une ligne oblique, par laquelle on a tenté de délimiter les zones d'influence des régions 4 et 5. Ce partage est justifié aux fréquences élevées, où la profondeur de pénétration dans le fer est faible devant la largeur de dent. Il l'est moins aux fréquences plus basses, mais alors l'influence des dents sur le bilan énergétique (c' est-à-dire leur contribution à la résistance et à la réactance) devient beaucoup plus faible, si bien que l'erreur introduite est peu conséquente.

La région 8 s'étend sous l'encoche jusqu'au centre du rotor.

Dans le cas où la zone polaire comporte aussi des amortisseurs, donc des cales, la schématisation du pas dentaire est indiquée fig. 12.

La seule différence de principe avec la fig. 11 consiste en la disparition des régions 3 et 7.

Du fait que le dessin réel de la section droite d'un rotor ne correspond pas exactement aux dessins idéalisés des fig. 10, 11 et 12, on a établi en annexe B une procédure de détermination des dimensions afférentes à ces dessins. Dans cette procédure, on a cherché à respecter les surfaces correspondant aux différents milieux, afin de minimiser l'erreur relative à leurs contributions énergétiques respectives.

Chapitre 3

SOLUTION APPROCHEE DES EQUATIONS DE MAXWELL RELATIVEMENT A UN PAS DENTAIRE DU ROTOR (fer, cales et amortisseur)

3.1 - CHOIX DES AXES DE COORDONNEES.

L'orientation des axes de coordonnées est indiquée fig. 13, dans le cas d'un pas dentaire de la zone bobinée (le principe est exactement le même pour un pas dentaire de la zone polaire). Dans la zone occupée par les encoches on utilise les coordonnées cartésiennes : trièdre direct $0\,x\,y\,z$, avec x dans le sens axial de l'avant vers l'arrière, y radial dirigé vers le centre, z tangentiel vers la gauche (sens trigonométrique).

Afin de simplifier les équations, l'origine du trièdre est différente pour chaque région, et placée au milieu du bord périphérique de la région.

L'influence de la courbure est traduite :

- dans la zone occupée par les encoches, par la largeur du rectangle idéal représentatif de chaque région,

- dans la zone sous les encoches grâce au coefficient de correction dont l'étude fait l'objet de l'annexe A.

La transposition de la fig. 13 au cas d'un pas dentaire de la zone polaire ne présente aucune difficulté : simplement les régions 3 et 7, ainsi que O_3 et O_7 disparaissent.

Du fait qu'on s'intéresse pour le moment uniquement à la partie droite du rotor, et en négligeant les effets d'extrémités, les champs sont réduits à leurs seules composantes H_y et H_z, fonctions de y et z seulement, et la densité du courant est réduite à sa seule composante J_x, fonction de y et z seulement.

3.2 - PAS DENTAIRE DE LA ZONE BOBINEE.

On appelle "perméabilité relative" le quotient de la perméabilité par μ_0, perméabilité du vide.

On suppose que le fer des dents de la zone a (fig. 10) a une perméabilité relative μ_a uniforme, et que le fer de la zone b , a une perméabilité relative μ_b également uniforme, mais pouvant être distincte de μ_a . On s'intéresse à un pas dentaire quelconque de la zone bobinée ; ainsi que cela a été exposé au § 2.2.3.2., et notamment du fait de la prise en compte séparée des réactances de magnétisation, l'impédance associée à ce pas dentaire est valable pour tous les pas dentaires de même géométrie, si bien qu'il suffit d'un seul calcul pour cette zone.

La valeur moyenne du champ tangentiel appliqué à ce pas dentaire sera notée H_a (nombre complexe associé à la valeur efficace du champ variant sinusoïdalement avec le temps). La différence de potentiel magnétique appliquée à la surface de la dent vaut donc $H_a\ t_{a1}$ (cf. fig. 8 et fig. 11).

Le but du calcul qui va suivre est d'exprimer toutes les grandeurs électromagnétiques de ce pas dentaire en fonction du seul paramètre H_a , ainsi, bien entendu, que du glissement g . Rappelons enfin que, pour le moment, et conformément à l'hypothèse du § 2.2., on suppose que l'enroulement inducteur est à circuit ouvert.

3.2.1 - Régions 1 et 5, 2 et 6, 3 et 7 (fig. 11).

3.2.1.1. Première étape de résolution.

La solution des équations de Maxwell dans ces régions ne devrait pas être effectuée, en toute rigueur, en ignorant l'existence des régions voisines (notamment l'entrefer et les régions 4 et 8). Mais on sait qu'une telle démarche conduirait à exprimer les grandeurs électromagnétiques sous la forme de séries infinies et lentement convergentes du fait de l'existence de points anguleux dans les limites des régions, ce qui rendrait la solution du problème extrêmement compliquée, au point qu'aucune tentative dans cette voie n'a été abordée à notre connaissance, Dans ce qui suit on adopte une méthode de résolution approchée consistant dans une première étape à ignorer l'entrefer et les régions 4 et 8, et par la suite on cherchera une méthode de raccordement, entre les équations des différentes régions qui rende aussi faible que possible l'erreur due à cette simplification.

Cette simplification nous conduit à considérer, dans une première étape, uniquement les couples de régions se faisant face : (1, 5), (2,6), (3, 7) - (fig. 11). A nouveau nous allons considérer chacun de ces couples comme indépendant des autres, ce qui sera justifié par la suite, et qui nous conduit à les traiter tous trois de façon indépendante, en adoptant le couple d'indices (i, j) qui prendra par la suite les valeurs (1,5), (2,6), (3,7).

Quels que soient i et j la mise en équation tout à fait classique résulte des équations de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}\ E} = -\frac{\overrightarrow{\partial B}}{\partial t}$$

$$\text{div}\ \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}\ H} = \vec{J}$$

et du fait que chaque region est caractérisée par une résistivité ρ et une perméabilité μ uniformes :

$$\vec{E} = \rho\,\vec{J} \qquad\qquad \vec{B} = \mu\,\vec{H}$$

d'où il résulte :

$$\overrightarrow{\Delta H} = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

et en régime sinusoïdal, après passage aux nombres complexes :

$$\Delta H = \frac{j\omega\mu}{\rho}\,H$$

la pulsation ω valant ici $\omega_o g$.

Dans la région i , la perméabilité vaut μ_o et la résistivité vaut ρ_{ai} caractérisant la zone, cf. fig. 10).

Nous explicitons seulement les trois relations utiles :

$$\frac{\partial H_{azi}}{\partial y} - \frac{\partial H_{ayi}}{\partial z} = J_{axi}$$

$$\frac{\partial^2 H_{ayi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_{ayi}}{\partial z^2} = \frac{j\omega_o g \mu_o}{\rho_{ai}}\,H_{ayi}$$

$$\frac{\partial^2 H_{azi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_{azi}}{\partial z^2} = \frac{j\omega_o g \mu_o}{\rho_{ai}}\,H_{azi}$$

De même dans la zone j, de perméabilité $\mu_o \mu_a$ et de résistivité ρ (résistivité du fer) :

$$\frac{\partial H_{azj}}{\partial y} - \frac{\partial H_{ayj}}{\partial z} = J_{axj}$$

$$\frac{\partial^2 H_{ayj}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_{ayj}}{\partial z^2} = \frac{j\omega_o g \mu_o \mu_a}{\rho} H_{ayj}$$

$$\frac{\partial^2 H_{azj}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_{azj}}{\partial z^2} = \frac{j\omega_o g \mu_o \mu_a}{\rho} H_{azj}$$

Pour écrire les équations de continuité à la frontière entre i et j on considère fig. 11 les largeurs b_{ai} des régions 1, 2 et 3 et les largeurs moyennes l_{aj} des dents au droit des régions 5, 6 et 7.

La continuité de la composante tangentielle du champ entraîne :

$$H_{ayj}\left(y, -\frac{l_{aj}}{2}\right) = H_{ayi}\left(y, \frac{b_{ai}}{2}\right)$$

La continuité de la composante normale de l'induction entraîne :

$$\mu_a H_{azj}\left(y, -\frac{l_{aj}}{2}\right) = H_{azi}\left(y, \frac{b_{ai}}{2}\right)$$

L'ensemble des équations qui viennent d'être écrites est satisfait par le système suivant dans lequel ne subsistent que deux constantes indéterminées A_{ai} et k_{ai}. Le champ H_a a été mis en facteur pour faciliter le passage ultérieur du schéma équivalent.

Ce système est tout à fait classique.

On a choisi pour la loi en y les fonctions hyperboliques de $\gamma_{ai}(k_{ai} - y)$ parce qu'elles s'adaptent mieux à la suite du calcul. Les lois en z sont plus simples que les lois en y à cause des symétries évidentes par rapport à cette variable.

$$(6)\quad \begin{cases} H_{ayj} = \dfrac{A_{ai} H_a \left[ch\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y) + k_{ai}\, sh\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y)\right] sh\, \beta_{ai} z}{\gamma_{ai}\, sh\, \dfrac{\beta_{ai} l_{aj}}{2}} \\ H_{azj} = \dfrac{A_{ai} H_a \left[sh\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y) + k_{ai}\, ch\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y)\right] ch\, \beta_{ai} z}{\beta_{ai}\, sh\, \dfrac{\beta_{ai} l_{aj}}{2}} \\ H_{ayi} = \dfrac{-A_{ai} H_a \left[ch\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y) + k_{ai}\, sh\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y)\right] \sin \alpha_{ai} z}{\gamma_{ai}\, \sin\, \dfrac{\alpha_{ai} b_{ai}}{2}} \\ H_{azi} = \dfrac{A_{ai} H_a \left[sh\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y) + k_{ai}\, ch\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y)\right] \cos \alpha_{ai} z}{\alpha_{ai}\, \sin\, \dfrac{\alpha_{ai} b_{ai}}{2}} \end{cases}$$

Les coefficients α_{ai} , β_{ai} , γ_{ai} , qui sont des coefficients d'amortissement complexes, étant liés par le système d'équations :

$$(7)\quad \begin{cases} \mu_a\, \alpha_{ai}\, tg\, \dfrac{\alpha_{ai} b_{ai}}{2} = \beta_{ai}\, th\, \dfrac{\beta_{ai} l_{aj}}{2} \\ \beta_{ai}^2 + \gamma_{ai}^2 = \dfrac{j\omega_o g \mu_o \mu_a}{\rho} \\ \gamma_{ai}^2 - \alpha_{ai}^2 = \dfrac{j\omega_o g \mu_o}{\rho_{ai}} \end{cases}$$

Les expressions J_{axi} et J_{axj} s'écrivent :

$$(8)\quad \begin{cases} J_{axi} = \dfrac{-\left(\gamma_{ai}^2 - \alpha_{ai}^2\right) A_{ai} H_a \left[ch\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y) + k_{ai}\, sh\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y)\right] \cos \alpha_{ai} z}{\alpha_{ai}\, \gamma_{ai}\, \sin\, \dfrac{\alpha_{ai} b_{ai}}{2}} \\ J_{axj} = \dfrac{-\left(\beta_{ai}^2 + \gamma_{ai}^2\right) A_{ai} H_a \left[ch\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y) + k_{ai}\, sh\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y)\right] ch\, \beta_{ai} z}{\beta_{ai}\, \gamma_{ai}\, sh\, \dfrac{\beta_{ai} l_{aj}}{2}} \end{cases}$$

L'inducteur étant supposé à circuit ouvert, il en résulte $J_{ax3} = 0$, ce qui peut être pris en compte sans modifier l'écriture ci-dessus en posant $\rho_{a3} = 0$.

3.2.1.2. Deuxième étape de résolution. Expressions définitives adoptées pour les champs, densités de courant et coefficients d'amortissement.

Les expressions (6) du champ magnétique doivent être continues aux frontières des régions 1 et 2, 2 et 3, 5 et 6, 6 et 7 puisque ces frontières ne correspondent pas à une discontinuité de perméabilité (voir fig. 11).

Ces frontières étant parallèles à Oz, la continuité nécessiterait, en premier lieu, que les lois en z soient identiques. Or elles ne le sont pas, d'une part à cause de la présence des coefficients β_{ai} et α_{ai} dans les fonctions hyperboliques et circulaires de z, et d'autre part parce que la largeur (dimensions selon z) des régions n'est pas la même de part et d'autre de ces frontières.

Nous allons donc ici encore procéder à des approximations.

Notre première approximation résulte de l'étude faite en annexe C, où on montre qu'on peut adopter pour β_{ai} et α_{ai} des valeurs β_a et α_a, indépendantes de i, et obéissant (ainsi que γ_{ai}) au système (9), qui peut être substitué à (7), et dans lequel en outre les b_{ai} et l_{ai} sont remplacés par b_a et l_a, largeurs moyennes d'encoche et de dent respectivement.

(9)

$$\mu_a \alpha_a \operatorname{tg} \frac{\alpha_a b_a}{2} = \beta_a \operatorname{th} \frac{\beta_a l_a}{2}$$

$$\beta_a^2 = \frac{j \omega_0 g \mu_0 \mu_a}{\rho}$$

$$\gamma_{ai}^2 - \alpha_a^2 = \frac{j \omega_0 g \mu_0}{\rho_{ai}}$$

Par ce système on détermine successivement β_a, puis α_a, indépendants du matériau i, puis γ_{ai} qui, lui, dépend du matériau i.

A ce propos, il faut remarquer que si les résistivités ρ du fer et ρ_{a2} des amortisseurs sont bien définies (compte tenu d'une éventuelle prise en compte de la température) un problème se pose en ce qui concerne la résistivité ρ_{a1} des cales. On a en effet signalé au § 2.1. - que dans la grande majorité des cas les cales ne sont pas d'un seul tenant sur toute la longueur, mais constituées de tronçons d'environ 20 à 30 cm de longueur. Le courant ne peut donc passer d'une cale à l'autre que par les meilleures surfaces de contact qu'il rencontre, et qui sont, d'une part le contact cale-dent, d'autre part le contact cale-amortisseur, car ces contacts bénéficient de l'effet favorable de la force centrifuge ; par contre, le courant

ne peut pratiquement pas franchir la surface commune à deux cales jointives, car la pression de contact est pratiquement nulle. L'évaluation théorique de l'accroissement apparent de ρ_{a1} résultant de ce phénomène présente une incertitude assez grande, à cause de l'importance, dans cette évaluation, de la résistance de contact entre matériaux, qui dépend beaucoup des états de surface. eux-mêmes mal connus. Il n'existe à notre connaissance aucune étude théorique ou expérimentale publiée, Cependant quelques considérations théoriques et quelques échanges d'opinions avec des spécialistes du calcul des machines nous ont permis d'avoir une idée approximative de ce coefficient majorateur, et les conséquences numériques de cette évaluation semblent, ainsi qu'on le verra en deuxième partie, assez cohérentes avec les résultats expérimentaux.

Le système (6) prend alors la forme, avec :

$$(i,j) = (1,5),(2,6), \text{ ou } (3,7)$$

(10)

$$H_{ayj} = \frac{A_{ai} H_a \left[ch\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y) + k_{ai}\, sh\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y)\right] sh\, \beta_a z}{\gamma_{ai}\, sh\, \frac{\beta_a l_a}{2}}$$

$$H_{azj} = \frac{A_{ai} H_a \left[sh\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y) + k_{ai}\, ch\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y)\right] ch\, \beta_a z}{\beta_a\, sh\, \frac{\beta_a l_a}{2}}$$

$$H_{ayi} = \frac{-A_{ai} H_a \left[ch\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y) + k_{ai}\, sh\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y)\right] \sin \alpha_a z}{\gamma_{ai} \sin \frac{\alpha_a b_{ai}}{2}}$$

$$H_{azi} = \frac{A_{ai} H_a \left[sh\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y) + k_{ai}\, ch\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y)\right] \cos \alpha_a z}{\alpha_a \sin \frac{\alpha_a b_{ai}}{2}}$$

On constate qu'au dénominateur on a introduit une largeur l_a unique, ce qui est logique du fait que la dent a une largeur peu variable (voir fig. 11), ce qui est une nécessité technique du fait de la saturation; par contre, on a été conduit à conserver les b_{ai} ,largeurs individuelles des régions d'encoches. Ce choix semble contradictoire avec les relations (9), et effectivement il introduit une légère erreur sur l'application du théorème de réfraction ; par contre, l'adoption de b_{ai} dans les formules (10) permet la prise en compte de l'effet de rétrécissement de zone, lorsqu'on va de la périphérie vers le centre, et qui résulte de la nature cylindrique du domaine et il était important d'avoir une prise en compte

correcte de cet effet, surtout aux basses fréquences où l'influence de la région 8 devient notable et où il faut donc avoir une bonne évaluation des conditions aux limites. On a pu constater qu'en faisant tendre la fréquence vers zéro les valeurs obtenues pour le champ à la limite de la région 8 sont conformes aux lois de la magnétostatique, ce qui ne constitue pas une preuve mais une bonne présomption de l'opportunité de l'option ci-dessus relative à b_{ai}.

Une deuxième approximation consiste alors à considérer que ces lois sont valables, bien que les largeurs de régions de part et d'autre des frontières, notamment b_{a1} b_{a2} b_{a3} pour l'encoche, ne soient pas tout à fait égales.

On verra au § 3.2.3.1. comment on a tenté d'atténuer les effets de ces approximations dans le choix de la méthode de détermination des constantes d'intégration.

Les expressions (8) deviennent :

(11)

$$J_{axi} = \frac{-j\omega_o g \mu_o A_{ai} H_a \left[ch\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y) + k_{ai}\, sh\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y)\right] \cos \alpha_a z}{\rho_{ai}\, \gamma_{ai}\, \alpha_a \sin \frac{\alpha_a b_{ai}}{2}}$$

$$J_{axj} = \frac{-\beta_a A_{ai} H_a \left[ch\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y) + k_{ai}\, sh\, \gamma_{ai}(h_{ai}-y)\right] ch\, \beta_a z}{\gamma_{ai}\, sh\, \frac{\beta_a l_a}{2}}$$

avec la même remarque en ce qui concerne J_{ax3}.

3.2.2 - Régions 4 et 8 (fig. 11).

Nous n'expliciterons pas de façon complète les expressions du champ et de la densité de courant dans les régions 4 et 8. En effet, la connaissance des phénomènes dans ces régions n'est nécessaire que pour les deux aspects suivants :

- fournir des relations permettant d'expliciter les 6 constantes d'intégration des équations (10) ; ces six constantes sont : A_{ai} et k_{ai}, avec : $i = 1, 2, 3$. Les relations manquantes, résultant de l'influence de l'entrefer et des régions 4 et 8, seront obtenues au § 3.2.3. - à partir de considérations physiques qui feront intervenir la forme des lois de distribution du champ dans ces régions, et surtout au voisinage des frontières, mais non leur expression analytique rigoureuse en tout point.

- évaluer leur contribution aussi bien locale que globale à l'ensemble des phénomènes énergétiques dont est le siège le rotor massif. Ce calcul sera effectué au chapitre 4 et comme on le verra, il ne nécessite pas de passer par la connaissance locale de l'expression analytique du champ.

3.2.3 - Raccordement des différentes régions. Calcul des coefficients numériques des expressions du champ dans la zone bobinée (a et b , fig. 10).

3.2.3.1. Raccordement entre les différents niveaux (i , j).

Si nous considérons les équations (10) le raccordement entre les régions suivantes : 1 et 2 - 2 et 3 - 5 et 6 - 6 et 7 - nécessite, d'une part que les lois en z soient continues d'une région à l'autre, d'autre part que les lois en y se raccordent. Le respect de ces conditions doit fournir 4 conditions entre les A_{ai} et les h_{ai}.

Si on examine alors les équations (10) on voit que les lois en z peuvent être rendues continues aux frontières, puisqu'elles ont même expression pour toutes les zones i , d'une part, pour toutes les zones j d'autre part.

Par ailleurs, le raccordement des lois en y conduit seulement à une identification pour des valeurs particulières de y.

On rencontre alors la difficulté suivante : du fait du rétrécissement progressif du pas dentaire à mesure qu'on s'approche du fond de l'encoche, et du fait qu'on a supposé tous les domaines i, j, rectangulaires, les frontières ne coïncident pas.

Il est cependant possible de surmonter cette difficulté, de la façon suivante :

On exprime d'abord la continuité des 2 composantes du champ au passage des 4 frontières, ce qui entraîne 8 conditions, tirées de (10) quel que soit z et pour les valeurs particulières de i, j et y.

$$H_{ay1}\ (y = h_{a1}) = H_{ay2}\ (y = 0)$$

$$H_{az1}\ (y = h_{a1}) = H_{az2}\ (y = 0)$$

$$H_{ay2}\ (y = h_{a2}) = H_{ay3}\ (y = 0)$$

$$H_{az2}\ (y = h_{a2}) = H_{az3}\ (y = 0)$$

$$H_{ay5}\ (y = h_{a1}) = H_{ay6}\ (y = 0)$$

$$H_{az5}\ (y = h_{a1}) = H_{az6}\ (y = 0)$$

$$H_{ay6}\ (y = h_{a2}) = H_{ay7}\ (y = 0)$$

$$H_{az6}\ (y = h_{a2}) = H_{az7}\ (y = 0)$$

Ces 8 conditions appliquées sans tenir compte du problème de la non coïncidence des frontières, conduisent aux 4 relations (12) entre les 6 constantes d'intégrations A_{a1} A_{a2} A_{a3} k_{a1} k_{a2} k_{a3}.

(N.B. : rappelons que $\gamma_{a3} = \alpha_a$)

(12)

$$k_{a1} = \frac{\gamma_{a2}}{\gamma_{a1}} \cdot \frac{sh\,\gamma_{a2} h_{a2} + k_{a2}\, ch\,\gamma_{a2} h_{a2}}{ch\,\gamma_{a2} h_{a2} + k_{a2}\, sh\,\gamma_{a2} h_{a2}}$$

$$k_{a2} = \frac{\alpha_a}{\gamma_{a2}} \cdot \frac{sh\,\alpha_a h_{a3} + k_{a3}\, ch\,\alpha_a h_{a3}}{ch\,\alpha_a h_{a3} + k_{a3}\, sh\,\alpha_a h_{a3}}$$

$$A_{a2} = \frac{A_{a1} k_{a1}}{sh\,\gamma_{a2} h_{a2} + k_{a2}\, ch\,\gamma_{a2} h_{a2}}$$

$$A_{a3} = \frac{A_{a2} k_{a2}}{sh\,\alpha_a h_{a3} + k_{a3}\, ch\,\alpha_a h_{a3}}$$

On considérera que ces relations sont acceptables, malgré la difficulté due à la non coïncidence des frontières, car les mêmes relations sont satisfaites si on exprime la continuité non plus de façon locale mais globale, en calculant la différence de potentiel magnétique entre deux milieux de dents consécutifs, aux deux niveaux correspondant aux frontières 1-2 et 2-3 :

$$\int_{-\frac{l_a}{2}}^{+\frac{l_a}{2}} H_{az5}(y = h_{a1})\,dz + \int_{-\frac{b_{a1}}{2}}^{+\frac{b_{a1}}{2}} H_{az1}(y = h_{a1})\,dz = \int_{-\frac{l_a}{2}}^{+\frac{l_a}{2}} H_{az6}(y=0)\,dz + \int_{-\frac{b_{a2}}{2}}^{+\frac{b_{a2}}{2}} H_{az2}(y=0)\,dz$$

$$\int_{-\frac{l_a}{2}}^{+\frac{l_a}{2}} H_{az6}(y = h_{a2})\,dz + \int_{-\frac{b_{a2}}{2}}^{+\frac{b_{a2}}{2}} H_{az2}(y = h_{a2})\,dz = \int_{-\frac{l_a}{2}}^{+\frac{l_a}{2}} H_{az7}(y=0)\,dz + \int_{-\frac{b_{a3}}{2}}^{+\frac{b_{a3}}{2}} H_{az3}(y=0)\,dz$$

3.2.3.2. Raccordement entre la région 8 et les régions 7 et 3.

Les équations (10) et (11) ont été établies sans tenir compte de la présence du fond d'encoche. On se propose de compenser partiellement l'erreur qui en résulte en étudiant avec soin les conditions de passage entre les zones a et b (voir la frontière fig. 10 et 11), en se basant sur des considérations physiques.

Tout d'abord il n'y a pas trop lieu de se préoccuper des glissements élevés (tels que par exemple la profondeur de pénétration dans la zone b soit faible devant le rayon de cette zone). En effet pour ces glissements le champ subsistant sous l'encoche est très faible du fait de l'effet pelliculaire, donc la contribution de cette zone au comportement de la machine est très réduit et les erreurs sont sans conséquences. Aux glissements faibles par contre on constate, en observant les équations (10) pour $(i, j) = (3,7)$ et $y = h_{a3}$ (fond d'encoche), que la composante H_{az3} est nettement prépondérante devant H_{ay3} et H_{az7}, ce qui signifie d'une part que le champ est pratiquement transversal à l'encoche, et d'autre part que la circulation du champ d'un bout à l'autre de la frontière est surtout dû à H_{az3}.

On considérera donc que dans la zone a, notamment au voisinage du fond d'encoche, le champ et la densité de courant sont donnés par les expressions (10) et (11) et que la zone b, par contre, se comporte comme une partie d'un rotor massif, obéissant aux lois étudiées en annexe A. On supposera en particulier que le champ tangentiel H_{bz8} et la densité de courant J_{bx8} se sont uniformisés sur le pas dentaire ; autrement dit, qu'à une faible profondeur sous la limite de la région 8 les perturbations dues à la présence des encoches se sont estompées. Cette dernière hypothèse est davantage valable aux faibles glissements, mais aux glissements plus élevés cela a peu d'importance pour les raisons citées plus haut.

Les deux quantités qui doivent être déterminées à l'aide des conditions de continuité à fond d'encoche sont alors le champ H_{bz8} pour la valeur $y = 0$ (voir fig. 13), que nous appellerons H_{bz80}, et la constante d'intégration k_{a3}.

Nous utiliserons donc pour cette détermination deux conditions aux limites, exprimées de façon globale pour s'affranchir des perturbations locales :

- conservation de la valeur moyenne $\overline{H}_z$ de la composante tangentielle H_z à la traversée de la frontière,
- conservation de la valeur moyenne $\overline{E}_x$ du champ électrique E_x à la traversée de la frontière (résultat de la conservation de l'induction normale, puisque $\overrightarrow{rot\ E} = -\frac{\overrightarrow{\partial B}}{\partial t}$).

La conservation du champ tangentiel, en valeur moyenne sur le pas dentaire t_b (voir fig. 11), s'exprime par la relation :

$$H_{bz80}\, t_b = \int_{-\frac{l_a}{2}}^{+\frac{l_a}{2}} H_{az7}\,(y = h_{a3})\, dz + \int_{-\frac{b_{a3}}{2}}^{+\frac{b_{a3}}{2}} H_{az3}\,(y = h_{a3})\, dz$$

Remplaçant $H_{a\jmath 7}$ et $H_{a\jmath 3}$ par leurs expressions (10) avec, $(i, j) = (3, 7)$ il vient une première relation :

(13)
$$H_{b\jmath 80} = \frac{2A_{a3} H_a k_{a3} (\alpha_a^2 + \beta_a^2)}{t_b \alpha_a^2 \beta_a^2}$$

La conservation du champ électrique, en valeur moyenne, s'exprime par la relation, en appelant E_{bx80} la valeur de E_{bx8} pour $y = 0$

(14)
$$E_{bx80}\, t_b = \int_{-\frac{l_a}{2}}^{+\frac{l_a}{2}} \rho J_{ax7}(y = h_{a3})\, dz + \int_{-\frac{b_{a3}}{2}}^{+\frac{b_{a3}}{2}} \rho_{a3} J_{ax3}(y = h_{a3})\, dz$$

(Remarque : $\rho_{a3} = \infty$ et $J_{ax3} = 0$, mais leur produit, qui est le champ électrique, est fini).

Le deuxième membre de l'expression (14) s'exprime très aisément à l'aide des expressions (11). En ce qui concerne le premier membre, il convient évidemment de savoir relier E_{bx80} et $H_{b\jmath 80}$ et ceci en tenant compte du fait que la courbure doit être prise en compte aux glissements faibles.

On peut tout d'abord écrire :

$$E_{bx80} = \rho J_{bx80}$$

La relation entre J_{bx80} et $H_{b\jmath 80}$ fait intervenir les équations de Bessel, mais sa valeur asymptotique - aux glissements élevés - est tirée du § A.4.2 - en y considérant la relation entre H_θ et J_z, d'où il vient :

$$J_{bx80} = -\beta_b H_{b\jmath 80} \quad (\jmath \text{ élevé})$$

(Le changement de signe étant ici dû à une orientation différente du trièdre).

β_b est défini conformément au § A.4.1., à savoir :

$$\beta_b^2 = \frac{j\omega_0 \jmath \mu_0 \mu_b}{\rho} \qquad \beta_b = \frac{1+j}{\delta_b} \qquad \delta_b = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega_0 \jmath \mu_0 \mu_b}}$$

- aux glissements faibles et pour $\mu = 1$, elle est tirée du § A.4.3. - en y considérant la relation entre H_θ (abstraction faite du terme irrotationnel représentant le champ magnétisant) et J_z en y faisant :

$$r = \frac{D_b}{2} \qquad \text{d'où il vient}$$

$$J_{bx\,80} = -\frac{16}{3 D_b} H_{bz\,80} \qquad (g \text{ faible}, \ \mu = 1)$$

- aux glissements faibles et pour $\mu = 2$, elle est tirée du § A.4.4. - en y considérant la relation entre H_θ (abstraction faite du terme irrotationnel représentant le champ magnétisant) et J_z et en y faisant :

$$r = \frac{D_b}{2} \qquad \text{d'où il vient}$$

$$J_{bx\,80} = -\frac{6}{D_b} H_{bz\,80} \qquad (g \text{ faible}, \ \mu = 2)$$

On a cherché à rassembler en une formule unique les expressions relatives aux glissements élevés et faibles. On a voulu adopter une loi de raccordement assez simple, et on a choisi d'utiliser la fonction th. Ce choix, qui conduit à une bonne approximation, peut être justifié :

- par analogie avec le cas du moteur asynchrone à encoches profondes, dont la théorie présente des analogies très remarquables avec le problème présent. Le champ et la densité de courant au fond d'encoche sont reliés entre eux par une loi extrêmement voisine de celle adoptée ci-dessous ;

- par cohérence avec le reste de l'étude de la courbure effectuée en Annexe A.- A la fin de cette étude (§ A.5.2. et A.5.3.), on est amené à adopter des coefficients de raccordement entre le cas des glissements élevés et celui des glissements faibles également inspirés de la théorie du moteur asynchrone à encoches profondes, et dont la validité a pu être établie grâce à un calcul sur ordinateur (§ A.6).

En conséquence, on adopte les relations :

- pour $\psi = 1$ $\qquad J_{bx\,80} = -\dfrac{\beta_b}{th(3\beta_b D_b/16)} H_{bz\,80}$

- pour $\psi = 2$ $\qquad J_{bx\,80} = -\dfrac{\beta_b}{th(\beta_b D_b/6)} H_{bz\,80}$

Sachant que $E_{xb\,80} = \rho J_{xb\,80}$ il suffit de reporter ces expressions dans (14) en utilisant aussi (13) pour obtenir k_{a3} ce qui donne en définitive :

(15)

$$(\psi = 1) \quad k_{a3} = \frac{\beta_a(\beta_a^2 + \mu_a \alpha_a^2)\, th(3\beta_b D_b/16)}{(\alpha_a^2 + \beta_a^2)\,\alpha_a \sqrt{\mu_a \mu_b}}$$

$$(\psi = 2) \quad k_{a3} = \frac{\beta_a(\beta_a^2 + \mu_a \alpha_a^2)\, th(\beta_b D_b/6)}{(\alpha_a^2 + \beta_a^2)\,\alpha_a \sqrt{\mu_a \mu_b}}$$

3.2.3.3. Raccordement entre la région 4 et les régions 5 et 1 (fig. 11).

Le choix d'une hypothèse correcte est ici plus délicat qu'au paragraphe précédent, du fait du voisinage de l'entrefer. Indiquons en effet sommairement le problème auquel on se trouve confronté.

Parmi tous les paramètres des équations (9) à (15) une seule constante d'intégration reste à déterminer, par exemple A_{a1}. On pourrait donc ignorer la zone 4 (fig. 11) et déterminer A_{a1} par exemple en écrivant que la circulation du champ entre les points A et B (fig.8) est égale à $H_a t_{a1}$.

Cette méthode n'est pas satisfaisante parce qu'elle ne rend pas compte des phénomènes qui se produisent à la tête de dent, au voisinage de l'entrefer, qui se traduisent par l'allure des lignes de champ esquissées fig. 8, et qui nécessitent la prise en compte de la région 4 ainsi qu'il a été expliqué au § 2.3. On a donc établi un modèle prenant en compte cette région et basé sur les considérations physiques du § 2.3. Dans une première étape de développement de la méthode, le modèle mathématique correspondant à la prise en compte de la région 4 a été appelé "modèle A", celui consistant à ignorer la région 4 a été appelé "modèle B". Ces deux modèles ont été utilisés et comparés pour un certain nombre d'alternateurs et de régimes. Cette comparaison est exposée et discutée en 3ème partie : les résultats sont toujours voisins, du moins en ce qui concerne les impédances des schémas équivalents, ou les pertes globales au rotor ; par contre, localement, le modèle B (sans prise en compte de la région 4) correspond à une moindre contribution relative du fer.

Comme par ailleurs le modèle A se justifie mieux théoriquement comme on va maintenant l'exposer, c'est le seul qui a été définitivement retenu et qui va donc être désormais développé.

La justification du modèle A (prise en compte de la région 4) repose sur les considérations suivantes :

Si on observe les fig. 8 et 11, on se rend compte qu'aux glissements élevés (profondeur de pénétration faible) tout le flux associé à la pénétration du champ transversal H passe par la région 4. Donc l'impédance associée à la région 4 se trouve en parallèle avec l'impédance associée au reste de la zone correspondant à un pas dentaire, ce qui permet de vérifier commodément si un modèle prenant en compte la région 4 conduit à une répartition des impédances (ou des puissances) réaliste. Or la répartition résultant du modèle établi plus loin s'est montrée satisfaisante sur la base de ce critère, du moins aux glissements élevés (voir plus loin). Elle s'est également révélée satisfaisante par confrontation avec le modèle de la bibliographie [11], qui considère justement l'impédance de la région 4 comme en parallèle avec les autres. La vérification s'est révélée probante jusqu'à un glissement $g = 10^{-2}$, ce qui pour le fer avec $\mu_a = 20$ correspond à une profondeur de pénétration d'environ 5 cm. Il est normal qu'en dessous de cette valeur de g la vérification soit moins bonne car alors une partie du flux passe en dehors de la zone a . De toutes façons la contribution énergétique de la région 4 devient alors très faible.

Prise en compte de la région 4.

Le raisonnement conduisant aux conditions de raccordement selon cette hypothèse est basé sur l'estimation de l'allure générale des lignes de force dans le voisinage de cette région, dessinées fig. 8, d'où les trois hypothèses :

1) On suppose que, dans la région 4, la composante prépondérante du champ est H_{z4} (soit $H_{z4} \gg H_{y4}$), autrement dit que les lignes de champ sont pratiquement parallèles à la coordonnée z. Cette hypothèse est tout à fait raisonnable lorsque la profondeur de pénétration dans cette zone δ_a est faible devant sa largeur ℓ_a. Nous l'étendons cependant au cas général, car lorsque δ_a croît (ou g décroît) l'influence énergétique de cette région devient faible, si bien que la dégradation de la

validité de cette hypothèse est sans conséquence gênante.

2) On suppose que le champ a tendance à être canalisé par le fer, c'est-à-dire que les lignes de force s'incurvent au coin de la dent, et qu'en conséquence, comme le montrent les deux premières équations (10) $H_{ay5} \gg H_{az5}$, cette incurvation est une conséquence de la grande perméabilité du fer vis-à-vis de celle des matériaux intérieurs à l'encoche.

3) On suppose enfin que, dans la région 4, la loi de variation en y de H_{z4} est sensiblement la même que, dans la région 5, la loi de variation en z de H_{y5}. Cette hypothèse revient à supposer que les tubes de force de l'induction conservent même largeur lorsqu'ils contournent le coin supérieur de la dent, canalisés par le fer.

Une première relation de continuité, indépendante des trois hypothèses ci-dessus, consiste simplement à écrire de deux manières la circulation du champ tangentiel sur un pas dentaire, à la surface périphérique du rotor. Il vient en effet (H_a défini en 3.2.) :

$$H_a t_{a1} = H_{az4}(y=0)\, l_{a1} + \int_{-\frac{b_{a1}}{2}}^{+\frac{b_{a1}}{2}} H_{az1}(y=0)\, dz$$

Si on pose :

$$H_{az40} = H_{az4}(y=0)$$

et si on remplace $H_{az1}(y=0)$ par son expression tirée de (10) la relation ci-dessus constituant la première relation de continuité, s'écrit :

$$H_a t_{a1} = H_{az40}\, l_{a1} + \frac{2A_{a1} H_a (sh\,\gamma_{a1} h_{a1} + k_{a1} ch\,\gamma_{a1} h_{a1})}{\alpha_a^2} \qquad (16)$$

La deuxième relation est une conséquence des trois hypothèses ci-dessus et, du fait que la perméabilité relative μ_a est supposée la même dans les régions 4 et 5, les trois propriétés suivantes :

- conservation de la composante du champ tangentielle au fer lors du contournement du coin de la dent,
- conservation de la composante de l'induction tangentielle au fer, lors du contournement du coin de la dent,
- continuité de la densité du courant J_x, au coin de la dent, exprimée en termes de la région 4 ou en termes de la région 5,

sont équivalentes, et conduisent à l'égalité :

$$H_{az40} = - H_{ay5}\left(y = 0,\ z = -\frac{l_a}{2}\right)$$

le signe - étant dû à l'orientation du trièdre, d'où il résulte :

$$H_{az40} = \frac{A_{a1} H_a (ch\ \gamma_{a1} h_{a1} + k_{a1} sh\ \gamma_{a1} h_{a1})}{\gamma_{a1}} \tag{17}$$

L'élimination de H_{az40} entre (16) et (17) fournit A_{a1} soit :

$$A_{a1} = \frac{t_{a1} \alpha_a^2 \gamma_{a1}}{2\gamma_{a1}(sh\ \gamma_{a1} h_{a1} + k_{a1} ch\ \gamma_{a1} h_{a1}) + l_{a1} \alpha_a^2 (ch\ \gamma_{a1} h_{a1} + k_{a1} sh\ \gamma_{a1} h_{a1})} \tag{18}$$

3.2.4 - Commentaires et justification physique.

La solution approchée des équations de Maxwell, développée au cours des § 3.2.1. - à 3.2.3. - précédents, n'est pas rigoureuse mathématiquement. Nous considérons cependant qu'elle réalise un compromis satisfaisant entre les deux aspects suivants :

- d'une part, le modèle mathématique auquel elle conduit est simple, ce qui entraîne que son utilisation est souple et que l'examen des différentes variantes peut être à tout instant soumis au jugement du sens physique de l'utilisateur, ce qui n'est pas le cas avec les modèles mathématiques trop compliqués ;

- d'autre part, il rend compte de façon suffisamment précise des phénomènes étudiés. Cette dernière affirmation ne peut évidemment être pleinement vérifiée que par la comparaison entre les résultats de calcul donnés par le modèle, et les résultats d'expériences effectuées sur les machines elles-mêmes. Mais il est cependant utile de commenter ici le sens physique des diverses hypothèses de raccordement adoptées.

D'une part, il a été retenu une forme unique de la solution du champ dans les paires de régions (1,5), (2,6), (3,7), (voir relations (10)). Cette forme unique est justifiée par le fait que les lois de variation en z sont surtout gouvernées par les phénomènes de pénétration dans le fer, du fait de sa grande perméabilité, donc dépendent peu de la nature du matériau d'encoche.

Les constantes à déterminer sont alors réduites au nombre de huit :

$$A_{a1}, A_{a2}, A_{a3}, k_{a1}, k_{a2}, k_{a3}, H_{az40} \text{ et } H_{bz80}$$

et huit relations sont nécessaires pour les déterminer.

C'est sur le choix de ces relations que repose tout le poids de la validité physique du modèle.

Quatre de ces relations, formules (12), sont obtenues par des relations de continuité le long des flancs des encoches et des dents et leur justification physique ne soulève pas de difficulté.

Deux autres relations : (13) et (18) sont basées sur la continuité du champ tangentiel, mais seulement en valeur moyenne sur un pas dentaire.

Le soin qu'on a pris à respecter la continuité de la composante tangentielle du champ, localement ou encore en valeur moyenne sur la traversée d'un pas dentaire à différents niveaux, est d'une grande importance sur le plan de la validité de la méthode, car il entraîne (par application du théorème d'Ampère au secteur circulaire représentatif d'un pas dentaire) que la somme des courants rotoriques est toujours bien égale à la d.d.p.m. $H_a t_{a1}$ appliquée à la surface du pas dentaire. Il en résulte une certaine compensation des erreurs dues au caractère approché de la méthode, affectant la distribution locale exacte de ces courants.

Enfin, les deux dernières relations (15) et (17) :

La relation (15) est basée sur la continuité du champ électrique en valeur moyenne, au passage de la zone a au-dessus du fond d'encoche à la zone b au-dessous du fond d'encoche.

La condition (17) est basée sur une estimation de l'influence perturbatrice de l'entrefer vis-à-vis de l'extrémité de la dent.

3.3 - SOLUTION DES EQUATIONS DE MAXWELL DANS LA ZONE POLAIRE.

Nous considérerons trois cas, selon qu'il y a dans la zone polaire :

- des cales amagnétiques (et donc des amortisseurs),
- des cales magnétiques (et donc des amortisseurs),
- pas de cales.

Nous étudierons ici seulement le 1er cas, le plus fréquent :

- présence de cales amagnétiques et d'amortisseurs, dont la solution est tout à fait analogue à celle du cas traité au § 3.2.

Les deux autres cas : cales magnétiques ou absence de cales, seront traités au § 3.4 - au titre des "technologies particulières".

Dans le cas des cales amagnétiques et amortisseurs (fig. 12) le principe de la mise en équations et les hypothèses simplificatrices adoptées pour leur résolution sont les mêmes que dans la zone interpolaire, la seule différence de principe résidant dans la disparition des zones 3 et 7 (pas-

sage de la fig. 11 à la fig. 12). Les indices a et b doivent être respectivement changés en c et d.

Il nous suffit donc de transcrire, compte tenu de ces remarques, les équations encadrées du § 3.2.

Les équations (9) deviennent (avec $i=1$ ou 2)

(19)

$$\mu_c \alpha_c \operatorname{tg} \frac{\alpha_c b_c}{2} = \beta_c \operatorname{th} \frac{\beta_c \ell_c}{2}$$

$$\beta_c^2 = \frac{j\omega_0 g \mu_0 \mu_c}{\rho}$$

$$\gamma_{ci}^2 - \alpha_c^2 = \frac{j\omega_0 g \mu_0}{\rho_{ci}}$$

et leur écriture résulte de la simplification autorisée par l'étude faite en Annexe C dans laquelle on doit substituer l'indice c à l'indice a, l'indice i n'ayant plus que les valeurs 1 ou 2.

La remarque faite à la suite des équations (9) en ce qui concerne le choix de la résistivité des cales doit être transposée ici en ce qui concerne ρ_{c1}, qui intervient dans le calcul de γ_{c1}.

Les équations (10) et (11) deviennent, avec $(i, j) = (1,5)$ ou $(2,6)$, et en appelant H_c le champ tangentiel moyen à la surface du rotor, en valeur efficace (comme H_a, H_c représente un nombre complexe dans lequel l'opérateur $e^{j\omega_0 g t}$ est sous-entendu).

$$H_{cyj} = \frac{A_{ci} H_c \left[ch\, \gamma_{ci} (h_{ci} - y) + k_{ci}\, sh\, \gamma_{ci} (h_{ci} - y) \right] sh\, \beta_c z}{\gamma_{ci}\, sh\, \frac{\beta_c l_c}{2}}$$

$$H_{czj} = \frac{A_{ci} H_c \left[sh\, \gamma_{ci} (h_{ci} - y) + k_{ci}\, ch\, \gamma_{ci} (h_{ci} - y) \right] ch\, \beta_c z}{\beta_c\, sh\, \frac{\beta_c l_c}{2}}$$

(20)

$$H_{cyi} = \frac{-A_{ci} H_c \left[ch\, \gamma_{ci} (h_{ci} - y) + k_{ci}\, sh\, \gamma_{ci} (h_{ci} - y) \right] \sin \alpha_c z}{\gamma_{ci}\, \sin\, \frac{\alpha_c b_{ci}}{2}}$$

$$H_{czi} = \frac{A_{ci} H_c \left[sh\, \gamma_{ci} (h_{ci} - y) + k_{ci}\, ch\, \gamma_{ci} (h_{ci} - y) \right] \cos \alpha_c z}{\alpha_c\, \sin\, \frac{\alpha_c b_{ci}}{2}}$$

$$J_{cxi} = \frac{-j \omega_o g \mu_o A_{ci} H_c \left[ch\, \gamma_{ci} (h_{ci} - y) + k_{ci}\, sh\, \gamma_{ci} (h_{ci} - y) \right] \cos \alpha_c z}{\rho_{ci}\, \alpha_c\, \gamma_{ci}\, \sin\, \frac{\alpha_c b_{ci}}{2}}$$

(21)

$$J_{cxj} = \frac{-\beta_c A_{ci} H_c \left[ch\, \gamma_{ci} (h_{ci} - y) + k_{ci}\, sh\, \gamma_{ci} (h_{ci} - y) \right] ch\, \beta_c z}{\gamma_{ci}\, sh\, \frac{\beta_c l_c}{2}}$$

et, enfin, les relations permettant de calculer les constantes d'intégration deviennent (en suivant le même ordre qu'au § 3.2).

$$k_{c1} = \frac{\gamma_{c2}}{\gamma_{c1}} \cdot \frac{sh\,\gamma_{c2} h_{c2} + k_{c2}\, ch\,\gamma_{c2} h_{c2}}{ch\,\gamma_{c2} h_{c2} + k_{c2}\, sh\,\gamma_{c2} h_{c2}}$$

$$A_{c2} = \frac{A_{c1} k_{c1}}{sh\,\gamma_{c2} h_{c2} + k_{c2}\, ch\,\gamma_{c2} h_{c2}}$$

$$H_{dz\,80} = \frac{2 A_{c2} H_c k_{c2}}{t_d} \left(\frac{\alpha_c^2 + \beta_c^2}{\alpha_c^2\, \beta_c^2} \right)$$

(22)

$$k_{c2}(p=1) = \frac{\beta_c (\beta_c^2 + \mu_c \alpha_c^2)}{(\alpha_c^2 + \beta_c^2)\, \alpha_c \sqrt{\mu_c \mu_d}}\; th\, \frac{3 \beta_d D_d}{16}$$

$$k_{c2}(p=2) = \frac{\beta_c (\beta_c^2 + \mu_c \alpha_c^2)}{(\alpha_c^2 + \beta_c^2)\, \alpha_c \sqrt{\mu_c \mu_d}}\; th\, \frac{\beta_d D_d}{6}$$

$$H_{cz\,40} = \frac{A_{c1} H_c (ch\,\gamma_{c1} h_{c1} + k_{c1}\, sh\,\gamma_{c1} h_{c1})}{\gamma_{c1}}$$

$$A_{c1} = \frac{t_{c1} \alpha_c \gamma_{c1}}{2\gamma_{c1} (sh\,\gamma_{c1} h_{c1} + k_{c1}\, ch\,\gamma_{c1} h_{c1}) + t_{c1} \alpha_c^2 (ch\,\gamma_{c1} h_{c1} + k_{c1}\, sh\,\gamma_{c1} h_{c1})}$$

avec :

$$\beta_d^2 = \frac{j \omega_o g \mu_o \mu_d}{\rho} \qquad \beta_d = \frac{1+j}{\delta_d} \qquad \delta_d = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega_o g \mu_o \mu_d}}$$

3.4 - TECHNOLOGIES PARTICULIERES.

Continuant pour le moment à négliger les effets d'extrémités dont la prise en compte sera traitée en Annexe E, nous nous sommes limités aux cas particuliers suivants :

3.4.1 - Dans la zone bobinée.

Les cales existent toujours, et elles sont métalliques et non magnétiques. Le seul cas particulier qu'on puisse rencontrer est l'absence d'amortisseurs, qui ne présente pas de difficulté de prise en compte.

3.4.2 - Dans la zone polaire.

Lorsqu'il y a des amortisseurs dans cette zone, il y a nécessairement des cales qui peuvent être en métal amagnétique ou magnétique.

Dans le cas où les cales sont amagnétiques on applique la méthode du § 3.3.

Dans le cas où les cales sont magnétiques, donc de même métal que le reste du corps du rotor, il est apparu plus commode et sans conséquence notable sur la précision du calcul, de négliger complètement les amortisseurs dans cette zone et de considérer les pôles du rotor comme s'ils étaient entièrement massifs (en fait, les amortisseurs servent surtout, dans ce cas, à la refermeture des courants par les frettes d'extrémités). On considère alors que les équations énergétiques applicables normalement à la zone d (fig. 12) s'étendent jusqu'au rayon $\frac{D_N}{2}$ donc concernent aussi bien la zone c . Les conséquences de cette simplification seront explicitées par la suite chaque fois que nécessaire, et notamment au cours des Annexes D et E.

Une autre particularité qui peut se manifester dans la zone polaire est l'existence de rainures transversales destinées à l'équilibrage des moments d'inertie de flexion, et ceci seulement dans le cas des rotors bipolaires ($p = 1$) (voir Annexe D, fig. D1 à D3).

Nous distinguerons alors deux possibilités :

a) Dans le cas où la machine est munie d'amortisseurs complets dans la zone polaire (que les cales soient magnétiques ou non), nous supposerons que les rainures sont shuntées par les amortisseurs et les cales et, en conséquence, nous négligerons l'existence de ces rainures.

b) Dans le cas où la machine n'est pas munie de cales ou d'amortisseurs dans la zone polaire, une première approche de prise en compte est traitée en Annexe D, § D.3.

3.5 - RACCORDEMENT ENTRE LA ZONE POLAIRE ET LA ZONE BOBINEE.

Le problème évoqué dans ce paragraphe est celui des conditions à la limite entre les secteurs circulaires affectés à la zone bobinée (a et b, fig. 10) et à la zone polaire (c et d , fig. 10).

Pour un pas dentaire voisin de la frontière, la loi de répartition des grandeurs électromagnétiques est, en toute rigueur, affectée par la présence d'une répartition différente de l'autre côté de la frontière. Cependant, nous considérons que cette particularité est prise en compte sinon de façon locale, du moins de façon globale, par le fait qu'à partir des répartitions qui viennent d'être calculées on établira dans une première étape un schéma équivalent complet dans lequel tous les pas dentaires seront représentés individuellement avec leurs impédances de fuites et leurs réactances mutuelles, ce qui revient bien à respecter pour chaque frontière, globalement et non localement, les continuités nécessaires des grandeurs électromagnétiques.

Il faut noter en outre que le comportement électromagnétique des zones polaires et bobinée est généralement assez voisin, malgré la différence de technologie de ces deux zones, et c'est une raison supplémentaire pour que le problème de raccordement ne soit pas préoccupant. On a pu le constater numériquement car, dans une première étape de cette méthode, on avait traité ce problème de raccordement de façon beaucoup moins raffinée ; or les différences numériques entre les résultats des deux méthodes ont atteint au maximum 15 % et encore dans un cas d'extrême différence entre la technologie des deux zones.

Chapitre 4

EXPRESSION DES PUISSANCES ACTIVES ET REACTIVES, POUR UN PAS DENTAIRE, DANS LES DIFFERENTES REGIONS. IMPEDANCES ET SCHEMAS EQUIVALENTS

4.1 - PUISSANCES ACTIVES ET REACTIVES.

On dispose maintenant d'expressions analytiques du champ et de la densité de courant en tous points des régions 1 - 2 - 3 - 5 - 6 - 7 de la zone a et 1 - 2 - 5 - 6 de la zone c (pour cette dernière, lorsqu'elle est pourvue de cales amagnétiques) et on peut en déduire la puissance active et réactive. En effet, dans une région de volume V, où la densité de courant et le champ magnétique sont fonctions sinusoïdales de pulsation $\omega_0 g$, représentées par les nombres complexes J_v et H_v respectivement (valeurs efficaces, fonctions des coordonnées d'espace) et où la résistivité et la perméabilité relative sont uniformes et valent respectivement ρ_v et μ_v, la puissance active P_v et la puissance réactive Q_v s'obtiennent respectivement par les formules :

$$(P_v) = \rho_v \iiint_V |J_v|^2 \, dv$$

$$(Q_v) = \mu_0 \mu_v \omega_0 g \iiint_V |H_v|^2 \, dv$$

La justification de cette dernière formule est donnée en Annexe A, § A.3. Indiquons sommairement qu'elle est basée sur le fait qu'une inductance L s'obtient classiquement en calculant l'énergie magnétique emmagasinée dans le volume attribué à cette inductance, soit :

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \iiint_v B H \, dv$$

et que la puissance réactive correspondante, en régime sinusoïdal de pulsation ω s'écrit $Q = L \omega I^2$.

Nous trouvons ici le prolongement de l'hypothèse simplificatrice adoptée au § 2.2.3.2. : le champ magnétique intervenant ci-dessus est obtenu en séparant arbitrairement les deux composantes radiale et tangentielle du champ dans l'entrefer, et en considérant les phénomènes de pénétration liées à la composante tangentielle, l'influence de la composante radiale étant supposée prise en compte dans la part "magnétisante" des impédances propres et mutuelles, intervenant dans l'établissement des équations complètes de cou-

plage entre les divers pas dentaires. On peut apporter à cette simplification le même type de justification que pour le champ magnétique : les phénomènes énergétiques sont prépondérants dans l'encoche, alors que la composante radiale du champ dans l'entrefer tend à être canalisée dans les dents.

Mais les résistances et réactances que l'on obtiendra par ce procédé ne sont pas exactement celles représentées sur les schémas fig. 9 et que nous nous proposons de calculer. En effet, d'après les relations (4) et (5), ces impédances afférentes à la pulsation $q\omega_o$ sont arithmétiquement divisées par q, afin d'appliquer aux bornes les tensions $j\omega_o \psi_d$ et $j\omega_o \psi_q$, et la raison d'être de ce changement d'échelle réside dans les applications pratiques qui sont faites sur ce schéma. Il suffit ici d'évoquer le cas typique du moteur asynchrone, où les impédances rotoriques figurant sur les schémas équivalents vus du stator sont $N\omega$ et R/q et non pas $N\omega q$ et R.

C'est pourquoi nous calculerons les puissances suivantes, déduites des précédentes en divisant par q et qui conduiront ensuite directement au calcul des éléments des schémas équivalents :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_\nu = \dfrac{\rho_\nu}{q} \iiint_V |J_\nu|^2 \, d\nu \\ \\ Q_\nu = \mu_o \mu_\nu \omega_o \iiint_V |H_\nu|^2 \, d\nu \end{array} \right. \qquad (23)$$

Les calculs sont développés en Annexe D, où sont également traités les cas :

- de la région 4 où le champ n'a pas encore été explicité,
- de la région 8, où doit être prise en compte l'influence de la courbure, elle-même traitée en Annexe A,
- de la région que nous repérerons par l'indice "o" qui correspond aux fuites prenant naissance, dans l'entrefer, entre becs de dents.

Le résultat de ces calculs est le suivant :

Si on considère un pas dentaire quelconque de la zone bobinée, les puissances active P_{ak} et réactive Q_{ak} relatives à la région k de ce pas dentaire (avec $k = 0,1 \ldots 7$) ainsi que P_{b8} et Q_{b8} pour la région 8, et exprimées selon la convention ci-dessus (formules (23)), s'écrivent en fonction du courant I_a traversant ce pas dentaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{ak} = R_{ak} \; I_a^{\,2} \\ Q_{ak} = X_{ak} \; I_a^{\,2} \\ P_{b8} = R_{b8} \; I_a^{\,2} \\ Q_{b8} = X_{b8} \; I_a^{\,2} \end{array} \right. \qquad (24)$$

Conformément aux hypothèses du chapitre 2 :

a) I_a est lié au champ tangentiel moyen H_a (après séparation du champ magnétisant) par la relation :

$$H_a \, t_{a1} = I_a \tag{25}$$

b) I_a varie d'un pas dentaire à l'autre, par contre les R et X de (24) sont indépendants du pas dentaire considéré, sont fonctions seulement de q et de la technologie de la machine considérée et sont calculés en D1.

Le pas dentaire de zone bobinée est donc caractérisé par l'impédance Z_{at}, fonction de q :

$$Z_{at} = R_{at} + j X_{at} = \left(\sum_{k=1}^{7} R_{ak} + R_{b8} \right) + j \left(\sum_{k=0}^{7} X_{ak} + X_{b8} \right) \tag{26}$$

De même, si on considère un pas dentaire quelconque de la zone polaire supposée pourvue de cales amagnétiques, les puissances active P_{ck} et réactive Q_{ck} relatives à la région k de ce pas (avec $k = 0, 1, 2, 4, 5, 6$) ainsi que P_{d8} et Q_{d8} pour la région 8, et exprimés de la même manière, s'écrivent en fonction du courant I_c traversant ce pas dentaire :

$$\begin{cases} P_{ck} = R_{ck} \left| I_c \right|^2 \\ Q_{ck} = X_{ck} \left| I_c \right|^2 \\ P_{d8} = R_{d8} \left| I_c \right|^2 \\ Q_{d8} = X_{d8} \left| I_c \right|^2 \end{cases} \tag{27}$$

avec, comme ci-dessus :

$$H_c \, t_{c1} = I_c \tag{28}$$

et les R et X de (27) indépendants du pas dentaire considéré, fonctions de q et de la technologie de la machine, et calculées en D2.

Le pas dentaire de zone polaire est donc caractérisé par l'impédance Z_{ct}, fonction de q :

$$Z_{ct} = R_{ct} + j X_{ct} = \left(\sum_{k=1}^{6} R_{ck} + R_{d8} \right) + j \left(\sum_{k=0}^{6} X_{ck} + X_{d8} \right) \tag{29}$$

Le cas des machines dont la zone polaire est soit pourvue de cales magnétiques, soit dépourvue de cales, est traité en Annexe D, § D.3, où est traité également le cas des rainures transversales non shuntées.

4.2 - SCHEMAS EQUIVALENTS A ENROULEMENT INDUCTEUR OUVERT, EN VALEURS REDUITES, SANS PRISE EN COMPTE DES EFFETS D'EXTREMITE.

4.2.1 - Présentation.

Nous allons tout d'abord nous limiter au schéma équivalent d'axe direct à inducteur ouvert. Il correspond à la 1ère équation (5) avec $g_d(j\omega_0 g)=0$, ou encore au schéma (fig. 9 a) avec la branche f à circuit ouvert.

Nous avons indiqué au § 2.2.3.2. qu'on considère les circuits suivants : le stator (indice s pour la réactance de fuites), et les n pas dentaires par demi-pôle au rotor (d'indice j, avec $j \in (1, n)$), formant donc $n + 1$ circuits couplés. Le comptage s'effectue à partir de l'axe q (voir fig. 1), et les circuits du rotor sont repérés par l'angle géométrique θ_j.

n_a est le nombre de pas dentaires de la zone bobinée,

n_c est le nombre de pas dentaires de la zone polaire,

donc $n = n_a + n_c$.

Toujours conformément aux hypothèses du § 2.2.3.2., les circuits sont caractérisés par :

- leur impédance propre somme de l'impédance "de magnétisation" (lignes de champ traversant l'entrefer), qui est une réactance pure, et de l'impédance de fuites, qui n'est une réactance pure qu'au stator (la résistance r_s n'intervient que dans les équations de Park (1)). Elles seront notées :

  - au stator :

$$\underline{z}_s + \underline{z}_{md} = j x_s + j x_{md}$$

  x_s est obtenue comme indiqué au § 2.2.3.1. Notons qu'en raison de l'étude faite en Annexe A, on aura inclus dans x_s la réactance x_{se} (formules (A.9) et (A.17) en grandeurs physiques, ou (42) en valeur réduite) destinée à prendre en compte la composante tangentielle du champ dans l'entrefer.

  Pour x_{md}, son obtention sera expliquée plus loin, ainsi que pour les autres réactances et impédances.

  Pour un pas dentaire rotor :

$$\underline{z}_j + \underline{z}_{mj} = \underline{z}_j + j x_{mj}$$

- Les impédances mutuelles entre les circuits deux à deux. Ce sont des réactances pures ; elles seront notées :

. entre le stator et un circuit rotorique

$$\underline{z}_{md_j} = j x_{md_j}$$

. entre deux circuits rotoriques ($j \neq l$, j et $l \in (1,n)$)

$$\underline{z}_{m_j l} = j x_{m_j l}$$

- les courants parcourant ces impédances seront notés i_d (courant stator d'axe direct) et i_{d_j} pour le rotor.

Les flux sont combinaisons linéaires des courants. En outre, en ce qui concerne les circuits rotoriques, la f.é.m. due à la variation de flux est entièrement compensée par la chute ohmique, puisque ces circuits sont court-circuités. Les équations d'axe direct s'écrivent donc à la manière d'un transformateur à $n+1$ enroulements dont n sont court-circuités.

D'où les relations (30) page suivante : (les traits interrompus correspondent à des lignes ou colonnes non écrites).

La résolution de ce système donne le quotient

$$j\omega_o \psi_d / i_d \ (\text{à } g_d (j\omega_o g) = 0) = j x_d (j\omega_o g) \qquad \text{d'après (5)}$$

Dans ce qui suit nous nous proposons d'établir une expression analytique de ce quotient, en fonction des hypothèses du § 2.2.3.2. et en fonction des résultats des calculs faits au chapitre 3 , résultats rassemblés au § 4.1.

Pour cela, nous allons :

- rappeler les modalités de passage des valeurs en unités physiques aux valeurs réduites,

- montrer que toutes les impédances "de magnétisation" (possédant l'indice m) s'expriment simplement en fonction de $\underline{z}_{md}$,

- établir les expressions des impédances "de fuites" $\underline{z}_j$ en fonction des impédances calculées en Annexe D et rappelées au § 4.1.,

- montrer que le système (30) se traduit alors par un schéma équivalent relativement simple,

- résoudre ce schéma équivalent,

- établir les formules homologues pour le schéma d'axe q.

Le détail des calculs est donné en Annexe F et nous nous contentons d'indiquer ci-dessous la ligne de calcul et les résultats.

(30)

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
j\omega_o\psi_d & & \mathfrak{z}_s+\mathfrak{z}_{md} & \mathfrak{z}_{md1} & \mathfrak{z}_{md2} & \mathfrak{z}_{mdj} & \mathfrak{z}_{mdj+1} & \mathfrak{z}_{mdn} & & i_d \\
0 & & \mathfrak{z}_{md1} & \mathfrak{z}_1+\mathfrak{z}_{m1} & \mathfrak{z}_{m12} & \mathfrak{z}_{m1j} & \mathfrak{z}_{m1j+1} & \mathfrak{z}_{m1n} & & i_{d1} \\
0 & & \mathfrak{z}_{md2} & \mathfrak{z}_{m12} & \mathfrak{z}_2+\mathfrak{z}_{m2} & \mathfrak{z}_{m2j} & \mathfrak{z}_{m2j+1} & \mathfrak{z}_{m2n} & & i_{d2} \\
\hline
0 & = & \mathfrak{z}_{mdj} & \mathfrak{z}_{m1j} & \mathfrak{z}_{m2j} & \mathfrak{z}_j+\mathfrak{z}_{mj} & \mathfrak{z}_{mjj+1} & \mathfrak{z}_{mjn} & -x & i_{dj} \\
0 & & \mathfrak{z}_{mdj+1} & \mathfrak{z}_{m1j+1} & \mathfrak{z}_{m2j+1} & \mathfrak{z}_{mjj+1} & \mathfrak{z}_{j+1}+\mathfrak{z}_{mj+1} & \mathfrak{z}_{m(j+1)n} & & i_{dj+1} \\
\hline
0 & & \mathfrak{z}_{mdn} & \mathfrak{z}_{m1n} & \mathfrak{z}_{m2n} & \mathfrak{z}_{mjn} & \mathfrak{z}_{m(j+1)n} & \mathfrak{z}_n+\mathfrak{z}_{mn} & & i_{dn} \\
\hline
\end{array}
$$

4.2.2 - Expressions des impédances figurant dans les équations (30) - (Voir Annexe F, § F 1).

Toutes les impédances "de magnétisation" afférentes à l'axe direct s'expriment en fonction de l'impédance $\jmath_{md} = j x_{md}$ du schéma fig. 9 a.

Le principe de ces correspondances est expliqué au § F 1.

L'expression approchée établie en (F.6) est destinée seulement à illustrer ce principe. En pratique x_{md} ainsi donc que toutes les réactances qui lui sont reliées, sont affectées de la même façon par la saturation du circuit magnétique et le principe de cette prise en compte apparaît dans les formules (A 40) et (A 41) où X_m n'est pas affecté d'un indice d ou q puisque, en Annexe A, la machine est supposée isotrope (Rappelons que le passage de X à x est donné par la formule (F 2)).

La réactance mutuelle entre le stator et un circuit du rotor d'indice j ($j \in (1, n)$) s'écrit :

(31) ou (F9)
$$x_{md_j} = x_{md} \cos h\theta_j$$

La réactance de magnétisation propre à un circuit d'indice j au rotor s'écrit :

(32) ou (F10)
$$x_{m_j} = \frac{\pi}{4} x_{md} \left(\frac{\pi}{2} - h\theta_j \right)$$

La réactance mutuelle entre deux circuits d'indices j et l du rotor s'écrit :

(33) ou (F11)
$$x_{m_{jl}} (j > l) = x_{m_j} = \frac{\pi}{4} x_{md} \left(\frac{\pi}{2} - h\theta_j \right)$$

Enfin l'impédance "de fuites" qui en ohms est donnée par (26) ou (29) est donnée en valeur réduite par :

(34) ou (F13)
$$\jmath_j = \jmath_{at} = \frac{6 h n_s'^2 Z_{at} I_n}{V_n} \qquad (1 \leq j \leq n_a)$$

(35) ou (F14)
$$\jmath_j = \jmath_{ct} = \frac{6 h n_s'^2 Z_{ct} I_n}{V_n} \qquad (n_a < j \leq n)$$

4.2.3 - Equations de fonctionnement et schéma équivalent d'axe direct à inducteur ouvert.

Compte tenu des relations (31) à (35), les équations (30) s'explicitent conformément à (36) (même pour des réactances pures on utilise la notation $\jmath = j\alpha$ pour gagner de la place).

Grâce aux répétitions que l'on peut constater et qui résultent notamment de la relation (33), à ce système peut être associé le schéma équivalent de la fig. 14.

Pour constater l'équivalence entre le système (36) et le schéma fig. 14, il suffit dans (36) de retrancher membre à membre les 2 lignes d'indices j et $j+1$ et de constater que l'équation obtenue est celle de la maille générale notée (1) fig. 14.

4.2.4 - Résolution du schéma équivalent d'axe direct (à inducteur ouvert) au moyen d'intégrales.

Le calcul complet est détaillé au § F 2. Donnons-en le principe et les résultats :

Le courant et l'angle varient peu d'une branche à l'autre du schéma fig. 14. On peut donc introduire une notation différentielle en posant :

$$\theta_{j+1} - \theta_j = \Delta\theta$$

$$\cos p\,\theta_{j+1} - \cos p\,\theta_j = -p\,\Delta\theta \sin p\,\theta_j$$

$$i_{dj+1} - i_{dj} = \Delta i_{dj}$$

L'équation de la maille générale telle que (1) fig. 14 peut alors s'écrire sous forme différentielle en remplaçant $\Delta\theta$ par $d\theta$; le courant infiniment petit i_{dj} a deux expressions distinctes :

. dans la zone bobinée ($0 < \theta < \theta_a$) nous le notons di_{ad}

. dans la zone polaire ($\theta_a < \theta < \frac{\pi}{2p}$) nous le notons di_{cd}

Ces courants élémentaires étant destinés à devenir infiniment petits lors de l'intégration, il est commode de ne plus faire apparaître les impédances $\jmath_{at}$ et $\jmath_{ct}$ (associés à l'angle fini correspondant à un pas polaire), mais l'impédance $\jmath_a$ (resp. $\jmath_c$)qui résulterait de la mise en parallèle de tous les $\jmath_{at}$ (resp. $\jmath_{ct}$) si la machine était isotrope, c'est-à-dire si $\jmath_{at}$ (resp. $\jmath_{ct}$) concernait tout le pas polaire, $\jmath_a$ et $\jmath_c$ sont alors donnés par :

$j\omega_o\psi_d$		$\mathfrak{z}_s+\mathfrak{z}_{md}$	$\mathfrak{z}_{md}\cos p\theta_1$	$\mathfrak{z}_{md}\cos p\theta_2$
0		$\mathfrak{z}_{md}\cos p\theta_1$	$\mathfrak{z}_1+\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_1\right)$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_2\right)$
0		$\mathfrak{z}_{md}\cos p\theta_2$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_2\right)$	$\mathfrak{z}_2+\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_2\right)$
0	=	$\mathfrak{z}_{md}\cos p\theta_j$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_j\right)$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_j\right)$
0		$\mathfrak{z}_{md}\cos p\theta_{j+1}$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_{j+1}\right)$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_{j+1}\right)$
0		$\mathfrak{z}_{md}\cos p\theta_n$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_n\right)$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_n\right)$

$\mathfrak{z}_{md}\cos p\theta_j$	$\mathfrak{z}_{md}\cos p\theta_{j+1}$	$\mathfrak{z}_{md}\cos p\theta_n$		i_d
$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_j\right)$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_{j+1}\right)$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_n\right)$		i_{d_1}
$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_j\right)$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_{j+1}\right)$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_n\right)$		i_{d_2}
$\mathfrak{z}_j+\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_j\right)$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_{j+1}\right)$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_n\right)$	×	i_{dj}
$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_{j+1}\right)$	$\mathfrak{z}_{j+1}+\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_{j+1}\right)$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_n\right)$		i_{dj+1}
$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_n\right)$	$\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_n\right)$	$\mathfrak{z}_n+\frac{\pi}{4}\mathfrak{z}_{md}\left(\frac{\pi}{2}-p\theta_n\right)$		i_{dn}

(37) ou (F 17)
$$\mathfrak{z}_a = \frac{4p\, t_{a1}\, \mathfrak{z}_{at}}{\pi D_r}$$

(38) ou (F 19)
$$\mathfrak{z}_c = \frac{4p\, t_{c1}\, \mathfrak{z}_{ct}}{\pi D_r}$$

Les courants di_{ad} et di_{cd} s'obtiennent alors comme solution d'équations intégro-différentielles et il vient :

(39) ou (F 21)
$$(0 < \theta < \theta_a) \qquad di_{ad} = -i_d\, p\, d\theta \left[b_d \cos p\theta + a_d \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_a}}\, p\theta \right]$$

(40) ou (F 22)
$$\left(\theta_a < \theta < \frac{\pi}{2p}\right) \quad di_{cd} = -i_d\, p\, d\theta \left[d_d \cos p\theta + c_d \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_c}} \left(\frac{\pi}{2} - p\theta\right) \right]$$

Les constantes a_d , b_d , c_d , d_d étant explicitées en (F.23) à (F. 26).

On peut alors exprimer sous forme différentielle la différence de potentiel entre deux noeuds consécutifs A_j et A_{j+1} de la fig. 14. L'élément différentiel sera noté dv_{ad} pour $0 < \theta < \theta_a$ et dv_{cd} pour $\theta_a < \theta < \frac{\pi}{2p}$.

On intègre alors dv_{ad} de 0 à θ_a. La tension correspondante est notée v_{ad}. Son expression complète est donnée en (F.28). Elle est proportionnelle à i_d et on pose :

$$\frac{v_{ad}}{i_d} = \mathfrak{z}_{ad}$$

$\mathfrak{z}_{ad}$ est une première partie de l'impédance cherchée.

On intègre ensuite dv_{cd} de a à $\frac{\pi}{2p}$. La tension correspondante est notée v_{cd}. Son expression complète est donnée en (F.29). Elle est proportionnelle à i_d d'où :

$$\frac{v_{cd}}{i_d} = \mathfrak{z}_{cd}$$

$\mathfrak{z}_{cd}$ est la deuxième partie de l'impédance cherchée.

La somme :

(41) $$\mathfrak{z}_{ad} + \mathfrak{z}_{cd} = \mathfrak{z}_{mrd}$$

(impédance rotor + magnétisant d'axe direct) est l'impédance vue des bornes $A_0 A_{n+1}$ (fig. 14).

Pour nous ramener au schéma équivalent de la fig. 9 a à inducteur ouvert (branche f déconnectée), il nous suffit maintenant de considérer $\mathfrak{z}_{mrd}$ comme résultant de la mise en parallèle de $\mathfrak{z}_{md} = jx_{md}$ et de l'impédance propre au rotor $r_{rd} + jx_{rd}$.

Conformément à l'étude faite en annexe A, nous devons inclure dans cette dernière impédance la valeur réduite jx_{se} associée à la réactance X_{se}, destinée à prendre en compte la composante tangentielle du champ dans l'entrefer, soit en réunissant (A.9) et (A.17) en une seule formule

(42) $$x_{se} = 2\, x_{me} \left(\frac{p^2 e^2}{D_r^2} \right)$$

(le passage de X_{me} à x_{me} se faisant par (F.2)).

d'où l' impédance rotorique d'axe direct :

(43) $$r_{rd} + jx_{rd} = \frac{\mathfrak{z}_{md}\, \mathfrak{z}_{mrd}}{\mathfrak{z}_{md} - \mathfrak{z}_{mrd}} + jx_{se}$$

et l'impédance cherchée $jx_d(j\omega_0 g)$ (à inducteur ouvert)

(44) $$jx_d(j\omega_0 g) = jx_s + \frac{jx_{md}(r_{rd} + jx_{rd})}{r_{rd} + jx_{rd} + jx_{md}}$$

4.2.5 - Equations de fonctionnement et schéma équivalent d'axe en quadrature.

Le calcul du schéma équivalent d'axe en quadrature s'obtient par le même calcul que pour l'axe direct, à condition simplement de permuter les rôles des axes d et q.

Les expressions complètes (33) ou (36) et la fig. 14 sont conservées, à condition :

- de remplacer l'indice d par q, et en particulier l'impédance $\mathfrak{z}_{md}$ par

$$\mathfrak{z}_{mq} = jx_{mq}$$

x_{mq} , réactance de magnétisation d'axe transversal, étant supposée connue (le calcul fait pour x_{md} s'applique et donnerait la même valeur si on ne considérait que l'entrefer ; la différence de réluctance des deux zones du rotor entraîne, en régime saturé, une légère différence de l'ordre de 10 % ($x_{mq} < x_{md}$)).

Rappelons que, comme pour x_{md} , la valeur numérique de x_{mq} doit tenir compte du champ magnétisant dans le fer du rotor, compte tenu des conditions de saturation propres au problème considéré.

- de considérer que la maille n° 1 est voisine de l'axe d, que dans les mailles n° 1 à n_c l'impédance $\mathfrak{z}_j$ vaut $\mathfrak{z}_{ct}$ et de n_c+1 à n elle vaut $\mathfrak{z}_{at}$ (d'où les mêmes $\mathfrak{z}_a$ et $\mathfrak{z}_c$ que précédemment par (37) et (38)).

L'angle θ doit maintenant être considéré comme variant de 0 à θ_c.

$$\theta_c = \frac{\pi}{2p} - \theta_a$$

pour les paramètres de zone c et de θ_c à $\frac{\pi}{2p}$ pour les paramètres de zone a.

Les expressions (39) et (40) deviennent :

(45) $$(0 < \theta < \theta_c) \qquad di_{cq} = -i_q p\, d\theta \left[d_q \cos p\theta + c_q \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_c}}\, p\theta \right]$$

(46) $$\left(\theta_c < \theta < \frac{\pi}{2p}\right) \qquad di_{aq} = -i_q p\, d\theta \left[b_q \cos p\theta + a_q \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_a}} \left(\frac{\pi}{2} - p\theta\right) \right]$$

Les constantes a_q b_q c_q d_q sont explicitées en annexe F, formules (F.30) à (F.33).

On peut alors procéder au calcul des tensions $\vartheta_{cq} = \vartheta_{A_{n_c}} - \vartheta_{A_o}$ et $\vartheta_{aq} = \vartheta_{A_{n+1}} - \vartheta_{A_{n_c+1}}$ de la fig. 14 d'où les deux parties de l'impédance entre A_o et A_{n+1}.

$$\frac{\vartheta_{cq}}{i_q} = \mathfrak{z}_{cq} \qquad \text{(donnée par (F. 34))}$$

$$\frac{\vartheta_{aq}}{i_q} = \mathfrak{z}_{aq} \qquad \text{(donnée par (F. 35))}$$

La somme :

(47) $$\mathfrak{z}_{aq} + \mathfrak{z}_{cq} = \mathfrak{z}_{mrq}$$

(impédance rotor + magnétisant d'axe en quadrature) est l'impédance vue des bornes $A_o A_{n+1}$ fig. 14 transposée comme indiqué précédemment.

Le calcul se termine comme au § 4.2.4.

L'impédance rotorique d'axe en quadrature vaut :

(48)
$$r_{rq} + j x_{rq} = \frac{\underline{z}_{mq}\,\underline{z}_{mrq}}{\underline{z}_{mq} - \underline{z}_{mrq}} + j x_{se}$$

et l'impédance $j x_q (j\omega_o g)$

(49)
$$j x_q (j\omega_o g) = j x_s + \frac{j x_{mq}\,(r_{rq} + j x_{rq})}{r_{rq} + j x_{rq} + j x_{mq}}$$

4.3 - EFFETS D'EXTREMITE.

La prise en compte des extrémités fait l'objet de l'annexe E. Pour des raisons expliquées dans cette Annexe, on s'est limité à évaluer l'effet des extrémités sur les résistances. La méthode conduit à affecter de coefficients majorateurs d'une part, les résistances R_{ak} et R_{b8} de (24) d'où une valeur majorée R_{atm} que l'on substitue à R_{at} dans (26), et d'autre part les résistances R_{ck} et R_{d8} de (27) d'où une valeur majorée R_{ctm} que l'on substitue à R_{ct} dans (29). Le reste du calcul est complètement inchangé. Par ailleurs, dans le cas particulier du calcul des pertes dues à la composante inverse du courant, la méthode exposée en annexe E fournit les coefficients par lesquels doivent être majorées les pertes calculées au chapitre 5.

4.4 - COUPLAGE ENTRE L'ENROULEMENT INDUCTEUR ET LES CIRCUITS MASSIFS DU ROTOR.

Nous devons compléter le schéma équivalent de la fig. 9a.

Nous supposons connues la réactance de fuites propres de l'enroulement inducteur x_{fd} et sa résistance r_{fd} en valeur réduite (comme expliqué au § 2.2.3.4., elles seront généralement fournies par le constructeur). et nous nous proposons de calculer la réactance de fuites communes x_{rfd}. En vertu de l'hypothèse du § 2.2.3.4. relative à l'indépendance linéaire des circuits massifs du rotor et de l'inducteur, il nous suffit de supposer le rotor sollicité par un champ d'axe direct et d'évaluer le flux bouclant l'enroulement inducteur.

Le principe du calcul se déduit de la schématisation fig. 15, où on a représenté seulement deux encoches du rotor, symétriques par rapport à l'axe polaire. Rappelons que le circuit rotorique correspondant, abstraction faite de l'enroulement inducteur, est caractérisé par son impédance propre, constituée :

- de la réactance de magnétisation correspondant au calcul de la composante radiale du champ dans l'entrefer, basé sur des contours d'intégration tels que A,

- de l'impédance de fuites, déduite de la pénétration de la composante tangentielle du champ dans l'entrefer, et correspondant à des contours d'intégration schématisés par les lignes B et B' (que l'on peut rapprocher d'un contour tel que OABO fig. 8, dont il a déjà été fait mention au § 2.2.3.2.).

La réactance de fuites commune aux circuits massifs du rotor et à l'inducteur s'évalue donc en utilisant les mêmes contours d'intégration : on évalue le flux de fuites bouclé par l'inducteur, et il suffit pour évaluer ce flux de prendre en compte la composante de l'induction traversant le plan médian de l'encoche, c'est-à-dire la composante B_z pour $z = 0$ dans les régions 1, 2 et 3 en se référant à la fig. 13.

Sur la fig. 15 on a en outre schématisé les conducteurs de l'inducteur, tous en série.

Du fait de la distribution, non sinusoïdale en fonction de l'angle, du champ dans les différentes encoches il faudrait en principe effectuer le calcul pour chaque paire d'encoches. Cependant cette distribution s'écarte en fait assez peu d'une distribution sinusoïdale, si bien qu'on va considérer que le flux de fuites traversant l'encoche située au droit de l'axe en quadrature, qui est la valeur crête du flux de fuites commun à l'inducteur et aux circuits massifs, est très peu différente de la valeur correspondant à x_{rfd}, qui correspondrait en toute rigueur au premier harmonique de la décomposition en série de Fourier de la distribution de ce flux, en fonction de l'angle, s'il était calculé pour chaque encoche.

La réactance de fuites commune x_{rfd} se compose de deux termes :

(50)
$$x_{rfd} = x_{rfd_o} + x_{rfd_a}$$

x_{rfd_o} correspond au flux de fuites dans l'entrefer ne faisant pas intervenir de matériaux massifs.

x_{rfd_a} correspond au flux de fuites commun entre les matériaux massifs du rotor et l'inducteur ; il n'existe que dans la zone a d'où le choix de l'indice.

4.4.1 - Calcul de x_{rfd_o} .

Cette partie de la réactance de fuites commune correspond à la contribution des fuites d'entrefer, c'est-à-dire dont une partie du trajet passe par l'entrefer, à la réactance du rotor massif.

La part de ces fuites, indépendante de la présence des encoches, correspond à la réactance x_{se}, donnée par (42), et intervenant déjà, selon (43), dans l'impédance rotorique du schéma équivalent fig. 9a.

La part de ces fuites relative aux fuites de bec d'encoches, correspondant à la réactance X_{ao} (D.28), se traduira dans x_{rfdo} par une réactance additionnelle x_{ado}. Nous poserons donc :

(51)
$$x_{rfdo} = x_{se} + x_{ado}$$

Pour le calcul de x_{ado} nous allons d'abord évaluer le flux, bouclé par l'inducteur, correspondant aux lignes de champ correspondantes. Il résulte des considérations du § D1.4 que ce flux peut se mettre sous la forme :

$$\varphi_{fro} = n_3 \mu_o L_r b_{a1} P_{ao} \overline{H}_{azo}$$

soit, comme $\overline{H}_{azo}$ est donné en fonction de H_a par (D.26)

$$\varphi_{fro} = n_3 \mu_o L_r \lambda_o H_a$$

n_3 étant le nombre de spires inductrices dans l'encoche d'axe en quadrature, λ_o ayant les dimensions d'une longueur :

$$\left(\lambda_o = b_{a1} P_{ao} \left| \frac{\overline{H}_{azo}}{H_a} \right| \right)$$

Le passage de φ_{fro} à x_{ado} sera explicité plus loin.

4.4.2 - Calcul de x_{rfda} .

Nous calculons d'abord le flux de fuites commun ϕ_{fr} envoyé par les circuits massifs à travers l'enroulement inducteur (fig. 15). Il s'obtient en intégrant l'induction magnétique dans la région 1 pour $0 < y < h_{a1}$ puis dans la région 2 pour $0 < y < h_{a2}$, puis dans la région 3 pour $0 < y < h_{a3}$, à partir des expressions H_{azi} du § 3.2 - formule (10).

On calcule le flux au milieu de l'encoche, c'est-à-dire pour $z = 0$.

4.4.2.1 - Calcul du flux de fuites communes Φ_{fr}.

Zone 1.

Les n_3 conducteurs de l'inducteur sont concernés, d'où :

$$\Phi_{fr1} = n_3 \mu_0 L_r \int_0^{h_{a1}} H_{az1}\, dy$$

$$\Phi_{fr1} = \frac{n_3 \mu_0 L_r A_{a1} H_a \left(ch\, \gamma_{a1} h_{a1} - 1 + k_{a1} sh\, \gamma_{a1} h_{a1} \right)}{\alpha_a \gamma_{a1} \sin \frac{\alpha_a b_{a1}}{2}} \tag{52}$$

Zone 2

Les n_3 conducteurs de l'inducteur sont concernés, d'où :

$$\Phi_{fr2} = n_3 \mu_0 L_r \int_0^{h_{a2}} H_{az2}\, dy$$

$$\Phi_{fr2} = \frac{n_3 \mu_0 L_r A_{a2} H_a \left(ch\, \gamma_{a2} h_{a2} - 1 + k_{a2} sh\, \gamma_{a2} h_{a2} \right)}{\alpha_a \gamma_{a2} \sin \frac{\alpha_a b_{a2}}{2}} \tag{53}$$

Zone 3.

Les n_3 conducteurs de l'inducteur ne sont pas concernés de la même manière, il faut opérer en deux étapes.

Soit un conducteur situé au niveau y , et remplaçons pour l'intégration, la variable y par η

$$H_{az3} = \frac{A_{a3} H_a \left[sh\, \alpha_a (h_{a3} - \eta) + k_{a3} ch\, \alpha_a (h_{a3} - \eta) \right]}{\alpha_a \sin \frac{\alpha_a b_{a3}}{2}}$$

Pour η variant de 0 à y, à ce conducteur est associé le flux :

$$\varphi_{fr3}(y) = \mu_0 L_r \int_0^{y} H_{az3}(\eta)\, d\eta$$

$$\varphi_{fr3}(y) = \frac{\mu_0 L_r A_{a3} H_a \left[ch\, \alpha_a h_{a3} - ch\, \alpha_a (h_{a3} - y) + k_{a3} sh\, \alpha_a h_{a3} - k_{a3} sh\, \alpha_a (h_{a3} - y) \right]}{\alpha_a^2 \sin \frac{\alpha_a b_{a3}}{2}}$$

Aux conducteurs situés entre les niveaux y et $y + dy$, en nombre $\frac{n_3\ dy}{h_{a3}}$ est associé le flux élémentaire :

$$d\phi_{fr3} = \frac{n_3}{h_{a3}}\ \varphi_{fr3}(y)\ dy$$

d'où, sur toute la hauteur

$$\phi_{fr3} = \frac{n_3}{h_{a3}} \int_0^{h_{a3}} \varphi_{fr3}(y)\ dy$$

(54)
$$\phi_{fr3} = \frac{n_3 \mu_o L_r A_{a3} H_a \left(\alpha_a h_{a3} \operatorname{ch} \alpha_a h_{a3} + \alpha_a h_{a3} k_{a3} \operatorname{sh} \alpha_a h_{a3} - k_{a3} \operatorname{ch} \alpha_a h_{a3} + k_{a3} \right)}{\alpha_a^3 h_{a3} \sin \frac{\alpha_a b_{a1}}{2}}$$

Expression de ϕ_{fr}

$$\phi_{fr} = \phi_{fr1} + \phi_{fr2} + \phi_{fr3}$$

On voit qu'on peut mettre en facteur $n_3 \mu_o L_r H_a$.

D'autre part, on s'intéresse désormais seulement au module de ϕ_{fr}

On écrira :

$$|\phi_{fr}| = n_3 \mu_o L_r |H_a| \lambda_f$$

λ_f ayant les dimensions d'une longueur et étant le module de la somme des expressions (52), (53) et (54) après qu'elles aient été divisées par $n_3 \mu_o L_r H_a$.

4.4.2.2. Calcul de $x_{fr\,da}$, puis de $x_{fr\,d}$.

Le flux $|\phi_{fr}|$ est un flux bouclé par les n_3 conducteurs de l'encoche. Pour obtenir le flux magnétique ϕ'_{fr} correspondant aux fuites, et pour l'ensemble de la machine, il faut donc diviser $|\phi_{fr}|$ par n_3, et le multiplier par 2, puisqu'à l'encoche considérée il faut associer l'encoche diamétralement opposée

$$\phi'_{fr} = \frac{2|\phi_{fr}|}{n_3} = 2 \mu_o L_r |H_a| \lambda_f$$

La réactance $x_{\ell da}$ est le quotient de $\phi'_{\ell rn}$, valeur de $\phi'_{\ell r}$ lorsque $|H_a|$ a sa valeur nominale, par la valeur efficace ϕ_n du flux nominal de la machine.

Pour calculer la valeur nominale de $|H_a|$ il faut introduire la notion de "densité linéique de courant", paramètre classique dans l'étude des machines tournantes. Rappelons l'origine et les modalités de calcul de cette grandeur.

Lorsque le stator est parcouru par des courants triphasés de valeur efficace I_s, la composante tangentielle du champ magnétique au droit du diamètre stator D_s ($D_s = D_r + 2e$), que nous notons provisoirement H_s a pour valeur efficace :

$$H_s = \frac{12 p n'_s I_s}{\pi D_s}$$

avec :

n'_s : nombre effectif de spires stator en série par pôles et phase
($n'_s = n_s k_b$)

n_s = nombre de spires stator en série par pôle et phase

k_b = coefficient de bobinage

La formule donnant H_s s'obtient très simplement en assimilant, toujours classiquement, la distribution de courant au stator à une couche superficielle de courant derrière laquelle existe un matériau de résistivité et de perméabilité magnétique très grandes. Notons en outre que la quantité H_s est le quotient du courant effectif total traversant une section droite du stator par la circonférence de cette même section droite au diamètre D_s. Cette quantité est appelée "densité linéique effective de courant stator", et sa valeur nominale notée A_s

$$A_s = \frac{12 p n'_s I_n}{\pi D_s}$$

est un des paramètres fondamentaux intervenant dans les calculs constructifs de machines.

Ce paramètre présente en outre l'avantage de fournir directement la valeur nominale A_r du champ magnétique tangentiel appliqué au rotor, ou encore de la "densité linéique effective de courant rotor". A_r s'écrit en effet :

(55)
$$A_r = \frac{12 f n'_s I_n}{\pi D_r}$$

La valeur nominale de $|H_a|$ étant A_r, il vient :

$$\phi'_{frn} = 2 \mu_0 L_r A_r \lambda_f$$

Le flux nominal ϕ_n (en valeur efficace) vaut :

$$\phi_n = \frac{V_n}{2 f n'_s \omega_0}$$

x_{rfda} est le quotient de ϕ'_{frn} par ϕ_n, d'où :

(56)
$$x_{rfda} = \frac{48 f^2 \mu_0 \omega_0 n'^2_s L_r I_n \lambda_f}{\pi D_r V_n}$$

Le même calcul permet de calculer x_{rfdo} laissé en attente au § 4.4.1 :

(57)
$$x_{rfdo} = \frac{48 f^2 \mu_0 \omega_0 n'^2_s L_r I_n \lambda_o}{\pi D_r V_n}$$

d'où enfin x_{rfd} en reportant (51), (56) et (57) dans (50).

4.5 - EXPRESSION DES FONCTIONS DE TRANSFERT HARMONIQUES.

Nous savons maintenant, soit calculer, soit obtenir les éléments des schémas équivalents des fig. 9a et 9b, pour toute valeur du glissement g.

Les quantités x_{rfd} , x_{rd} , r_{rd} , x_{rq} , r_{rq}, sont des fonctions de g, et devraient être en toute rigueur accompagnées de la parenthèse $(j\omega_0 g)$.

Les quantités x_s , x_{md} , x_{mq}, ne dépendent pas de g, mais doivent être choisies en fonction de l'état de saturation et en fonction du phénomène étudié.

La quantité r_{fd} dépend de la température (comme d'ailleurs les résistivités de tous les matériaux).

Ainsi qu'il a été annoncé au § 2.2.2., les fonctions de transfert intéressantes sont celles qui apparaissent dans les équations (2) à savoir $\ell_d(p)$, $\ell_q(p)$, $g_d(p)$ et qui deviennent en régime harmonique les nombres complexes $\ell_d(j\omega_o g)$, $\ell_q(j\omega_o g)$, $g_d(j\omega_o g)$. Pour des raisons de commodité on utilise des quantités proportionnelles aux quantités précédentes, définies et obtenues comme suit :

4.5.1 - Impédance harmonique d'axe direct.

C'est la quantité complexe :

$$z_d(j\omega_o g) = j x_d(j\omega_o g) = j \ell_d \omega_o (j\omega_o g)$$

Elle a déjà été calculée en (44) mais à inducteur ouvert. Son expression générale s'obtient à partir de la fig. 9a en faisant $v_{fd} = 0$, puis en calculant le quotient de $j\omega_o \psi_d$ par i_d, soit :

(58)
$$z_d(j\omega_o g) = jx_s + \frac{jx_{md}\left[jx_{rfd} + \frac{\left[r_{rd}+j(x_{rd}+x_{rfd})\right]\left[r_{fd}/g + j(x_{fd}-x_{rfd})\right]}{r_{rd}+r_{fd}/g+j(x_{rd}+x_{fd}-2x_{rfd})}\right]}{jx_{md}+jx_{rfd}+\frac{\left[r_{rd}+j(x_{rd}-x_{rfd})\right]\left[r_{fd}/g+j(x_{fd}-x_{rfd})\right]}{r_{rd}+r_{fd}/g+j(x_{rd}+x_{fd}-2x_{rfd})}}$$

4.5.2 - Impédance harmonique d'axe en quadrature.

C'est la quantité complexe

$$z_q(j\omega_o g) = j x_q(j\omega_o g) = j \ell_q \omega_o (j\omega_o g)$$

Elle a déjà été calculée en (49) soit :

(59)
$$z_q(j\omega_o g) = jx_s + \frac{jx_{mq}(r_{rq}+jx_{rq})}{r_{rq}+jx_{rq}+jx_{mq}}$$

4.5.3 - Fonction de transfert harmonique de l'excitation.

La confrontation des fig. 6 et 9a, ainsi que la transposition des équations (2) au régime sinusoïdal (substitution de $j\omega_o g$ à p) montre que la fonction complexe $g_d(j\omega_o g)$ peut se définir par la relation :

(60) $$g_d(j\omega_o g) = \frac{\psi_d}{v_{fd}} \qquad (\text{à } i_d = 0)$$

qui peut être aisément explicitée à l'aide de la fig. 9a.

Cette fonction est particulièrement utile lors des études relatives à l'influence des régulateurs de tension, et lors de telles études on est souvent conduit à la "normer" en lui faisant subir un simple changement d'échelle dont la raison d'être et les modalités sont les suivantes :

Le régime synchrone à vide et à fréquence nominale correspond, sur la fig. 9a, à $g=0$ et $i_d = 0$. Sachant que pour $g=0$, r_{rd} est infini (circuits massifs exempts de courants), il en résulte, d'après la fig.9a et pour ce régime :

$$j\omega_o \psi_d = \frac{j x_{md}}{r_{fd}} v_{fd}$$

Cette égalité montre que la valeur réduite v_{fd} associée à la tension d'excitation n'a pas pour valeur 1 lors du régime nominal à vide (où $\omega_o \psi_d = 1$).

On est alors amené à introduire [18] la valeur réduite e_{vf}

(61) $$e_{vf} = \frac{x_{md}}{r_{fd}} v_{fd}$$

liée à v_{fd} par un simple changement d'échelle.

A la fonction $g_d(j\omega_o g)$ on préférera la fonction $f_d(j\omega_o g)$ dite fonction de transfert harmonique de l'excitation

(62) $$f_d(j\omega_o g) = \frac{j\omega_o \psi_d}{e_{vf}} \qquad (\text{à } i_d = 0)$$

dont la limite est j lorsque g tend vers zéro.

Il résulte de (60), (61) et (62) que f_d est liée à g_d par la relation

$$f_d(j\omega_o g) = \frac{j\omega_o r_{fd}}{x_{md}} g_d(j\omega_o g)$$

et on peut aisément expliciter $f_d(j\omega_0 g)$ à l'aide de la fig. 9a, soit :

$$f_d(j\omega_0 g) = \frac{j^{r_{fd}}}{g} \cdot \frac{r_{rd} + j(x_{rd} - x_{rfd})}{\left[\frac{r_{fd}}{g} + j(x_{fd} - x_{rfd})\right]\left[r_{rd} + j(x_{md} + x_{rd})\right] + \cdots} \tag{63}$$

$$\cdots + j(x_{rfd} + x_{md})\left[r_{rd} + j(x_{rd} - x_{rfd})\right]$$

et on vérifie bien que pour g tendant vers zéro cette fonction tend vers la valeur prévue j.

Remarques :

1. On introduit sans difficulté e_{vf} dans le schéma équivalent fig. 9a en y remplaçant v_{fd} par

$$\frac{r_{fd}\ e_{vf}}{x_{md}}$$

2. La valeur de x_{md} à introduire dans le changement d'échelle (61) est évidemment celle retenue pour le schéma équivalent, elle dépend donc du niveau de saturation correspondant au problème considéré. En conséquence e_{vf} doit, en général, être considérée comme la valeur réduite d'une tension à vide "saturée".

Chapitre 5

APPLICATION PARTICULIERE DE LA METHODE AU CALCUL DES PERTES DUES A UNE COMPOSANTE INVERSE DE COURANT STATOR (avant prise en compte des effets d'extrémités)

5.1 - GENERALITES - METHODE RIGOUREUSE.

Dans la plupart des cas d'application de la présente méthode on est amené à utiliser la décomposition selon les deux axes et à calculer les fonctions de transfert harmoniques, conformément au § 4.5.

Un cas particulier se présente cependant : c'est la connaissance des pertes locales dues à une composante inverse de courant stator. La méthode fournit directement la connaissance de ces pertes en tout point de la machine.

En effet, une composante inverse de courant stator entraîne l'application au rotor d'un champ variant à la pulsation $2\omega_o$ (soit $q = 2$).

Les pertes locales sont alors données, pour un pas dentaire, en multipliant par 2 les expressions suivantes de l'Annexe D : (D.3), (D.12), (D.14), (D.21), (D.29), (D.33), (D.35), (D.42).

Il suffit donc de connaître le module de la valeur efficace du champ H_a en tout point de la zone bobinée et H_c en tout point de la zone polaire.

On peut montrer (voir notamment [3] p. 143) que si on impose une composante inverse de courant de valeur efficace I_2, il lui correspond des composantes I_d et I_q de pulsation $2\omega_o$, de valeur efficace égale à I_2, I_q étant en quadrature avant par rapport à I_d. On peut alors calculer les pertes pour tout pas dentaire par la méthode suivante.

Soit un pas dentaire de zone bobinée (indice a), au droit de l'angle θ.

La composante d'axe direct dI_{ad} du courant inverse correspondante est obtenue à partir de l'expression (39), dans laquelle on remplace i_d par I_2 et $d\theta$ par l'angle afférent à ce pas dentaire, soit $d\theta = t_{a1} / \pi D_\alpha$.

La composante d'axe quadrature dI_{aq} du courant inverse correspondante est obtenue à partir de l'expression (46), dans laquelle on remplace i_q par jI_2 et $d\theta$ par $t_{a1} / \pi D_r$.

Le courant inverse dI_{a2} afférent à ce pas dentaire est alors égal à $dI_{ad} + dI_{aq}$ et le champ H_a est obtenu en divisant dI_{a2} par t_{a1} conformément à (25), d'où les pertes puisqu'on connaît H_a.

Pour un pas dentaire de zone polaire il suffit de remplacer l'indice a par c et d'utiliser les relations (40), (45) et (28).

5.2 - METHODE SIMPLIFIEE.

Dans les calculs relatifs aux pertes dues à la composante inverse de courant stator, dont les résultats sont exposés en 3ème partie, on a adopté l'hypothèse simplifiée consistant à supposer qu'en régime inverse on peut négliger le courant magnétisant et que la distribution de champ à la surface du rotor suit une loi sinusoïdale en fonction de l'angle, correspondant à la distribution de champ créée par le bobinage du stator. Les champs $|H_a|$ et $|H_c|$ s'expriment alors directement en fonction du courant inverse I_2 par la relation :

$$|H_c| = |H_a| = A_r \frac{I_2}{I_n} = A_r \, i_2$$

indépendante de la position angulaire, A_r étant la densité linéique nominale de courant rotor donnée par (55).

Pour obtenir les pertes totales, il faut multiplier les pertes d'un pas dentaire :

- des zones a et b par $\dfrac{D_r}{t_{a1}} \times 2 \mu \theta_a$

- des zones c et d par $\dfrac{D_r}{t_{c1}} \times (\pi - 2 \mu \theta_a)$

Dans le cadre de cette méthode simplifiée, nous allons récapituler ci-dessous les expressions des pertes totales dues à une composante inverse I_2 de courant stator, caractérisée par sa valeur réduite $i_2 = I_2 / I_n$ en les séparant toutefois par catégorie de matériaux. Nous les noterons à l'aide de la lettre μ afin d'éviter la confusion avec les pertes P calculées en Annexe D.

5.2.1 - Zone bobinée.

5.2.1.1. Pertes dans les cales

(64) $$p_{a1} = 2 R_{a1} (A_r i_2)^2 2p D_r \theta_a t_{a1}$$

R_{a1} étant obtenu par (D.16) et (D.12).

5.2.1.2. Pertes dans les amortisseurs.

(65) $$p_{a2} = 2 R_{a2} (A_r i_2)^2 2p D_r \theta_a t_{a1}$$

R_{a2} étant obtenu par (D.16) et (D.12)

5.2.1.3. Pertes dans les différentes régions du fer.

(66) $$p_{a4} = 2 R_{a4} (A_r i_2)^2 2p D_r \theta_a t_{a1}$$

R_{a4} étant obtenu par (D.5) et (D.3)

(67) $$p_{aj} (j = 5,6,7) = 2 R_{aj} (A_r i_2)^2 2p D_r \theta_a t_{a1}$$

R_{aj} étant obtenu par (D.18) et (D.14)

Les pertes p_{b8} sont négligeables en régime inverse. Il serait cependant possible de les calculer en utilisant (D.23) et (D.21).

5.2.1.4. Pertes totales de la zone bobinée.

(68) $$p_a = \sum_{k=1}^{7} p_{ak} \qquad (p_{a3} = 0)$$

5.2.2 - Zone polaire.

Nous considérons ici seulement le cas où la zone polaire comporte des cales amagnétiques (et par conséquent des amortisseurs), les autres cas sont traités au § D.3.

5.2.2.1. Pertes dans les cales.

(69) $$p_{c1} = 2 R_{c1} (A_r i_2)^2 2p D_r \theta_c t_{c1}$$

R_{c1} étant obtenu par (D.37) et (D.33)

5.2.2.2. Pertes dans les amortisseurs.

(70) $$p_{c2} = 2 R_{c2} (A_r i_2)^2 2p D_r \theta_c t_{c1}$$

R_{c2} étant obtenu par (D.37) et (D.33)

5.2.2.3. Pertes dans les différentes régions du fer.

(71) $$p_{c4} = 2 R_{c4} (A_r i_2)^2 2p D_r \theta_c t_{c1}$$

R_{c4} étant obtenu par (D.31) et (D.29)

(72) $$p_{cj} (j = 5,6) = 2 R_{cj} (A_r i_2)^2 \; 2p D_r \theta_c t_{c1}$$

R_{cj} étant obtenu par (D.39) et (D.35).

Les pertes p_{d8} sont négligeables en régime inverse ; il serait cependant possible de les calculer en utilisant (D.44) et (D.42).

5.2.2.4. Pertes totales de la zone polaire.

(73) $$p_c = \sum_{k=1}^{6} p_{ck} \qquad (p_{c3} = 0)$$

5.3 - PRISE EN COMPTE DES EFFETS D'EXTREMITE.

Les conséquences de la prise en compte des extrémités sont traitées en Annexe E, et notamment au § E.3.5., en ce qui concerne les pertes en régime inverse.

2ème PARTIE

Prise en compte de la saturation lors de l'étude des régimes variables

Chapitre 1

PRISE EN COMPTE DE LA SATURATION LORS DU COMPORTEMENT DU FER MASSIF EN REGIME ALTERNATIF

1.1 - INTRODUCTION.

L'étude présente a pour objet d'établir un modèle mathématique permettant le calcul du fonctionnement des turboalternateurs lorsque les grandeurs électromagnétiques dans le rotor, et notamment le champ magnétique, varient de façon alternative avec une amplitude telle que la proportionnalité entre le champ et l'induction magnétiques ne soit plus respectée. C'est notamment le cas du régime asynchrone.

Le présent chapitre a pour objet de montrer que la saturation, malgré les non-linéarités qu'elle entraîne, peut être prise en compte par un modèle linéaire, c'est-à-dire dans lequel les grandeurs électromagnétiques (champ, densité de courant, etc...) peuvent être supposées suivre des lois sinusoïdales au cours du temps et donc, être représentées par des nombres complexes, la particularité introduite par le caractère non-linéaire de la caractéristique de magnétisation étant prise en compte en considérant maintenant la perméabilité comme un nombre complexe - et non plus comme un nombre réel - dont le module et l'argument dépendent de l'amplitude du champ magnétique appliqué.

Cette perméabilité complexe fait apparaître la saturation comme jouant un rôle similaire à celui de l'hystérésis ; il ne faut voir là qu'une ressemblance fortuite ; d'ailleurs nous ne tiendrons pas compte de l'hystérésis proprement dite, qui joue ici un rôle faible compte tenu de la faible valeur qu'elle présente dans l'acier utilisé pour construire les rotors.

Du fait que l'objet de ce chapitre est uniquement de fournir un modèle mathématique de la perméabilité en régime saturé, le modèle physique utilisé sera extrêmement simple et conduira à des équations unidimensionnelles ; l'espace est partagé en deux par un plan xOy séparant l'air du fer ; les lignes de courant sont supposées parallèles à Ox (effets d'extrémité négligés), le champ magnétique est supposé parallèle au plan xOz et on considère la pénétration du champ tangentiel H_y, supposant que la composante selon z est prise en compte dans la branche magnétisante des schémas équivalents.

Ces différentes hypothèses ont déjà été discutées dans la première partie. Rappelons qu'elles nécessitent l'introduction de termes correctifs à la méthode générale lorsque la profondeur de pénétration n'est pas faible devant le rayon de courbure ou devant le pas polaire et lorsqu'il y a lieu de tenir compte des effets d'extrémité.

Ces différentes corrections ont été étudiées aux annexes A et E.

1.2 - EQUATIONS TRADUISANT LE PHENOMENE DE PENETRATION (*).

On s'intéresse au cas d'un rotor cylindrique, mais on suppose le rayon de courbure assez grand pour pouvoir raisonner en coordonnées cartésiennes. La prise en compte de la courbure sera traitée au § 1.7.3.3.

On adopte un trièdre de référence direct, immobile par rapport au rotor (fig. 16), x selon l'axe du cylindre, y tangent au cylindre, z vers l'intérieur, $z=0$ étant la surface du fer.

On utilise les 3 équations :

$$\overrightarrow{\text{rot}\, H} = \vec{J}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}\, E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E} = \rho \vec{J}$$

On s'intéresse à un élément de surface unité dans le plan $x0y$.

$\vec{J}$ est réduit à sa composante j selon x, fonction de z et de t ; d'autre part, par suite des considérations précédentes,

$\vec{H}$ n'intervient que par sa composante h selon y, fonction de z et de t,

$\vec{B}$ n'intervient que par sa composante b selon y, fonction de z et de t.

Les équations vectorielles deviennent :

(74)
$$\frac{\partial h(z,t)}{\partial z} = -j(z,t)$$

(75)
$$\rho \frac{\partial j(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial b(z,t)}{\partial t}$$

(*) Les résultats présentés aux § 1.2, 1.3 et 1.4 ne sont pas originaux, voir notamment Bibliographie [20]. Mais leur exposé est utile à la présentation du modèle original proposé à partir du § 1.6.

Ces équations sont valables indépendamment de toute hypothèse sur la perméabilité.

Enfin, nous supposerons que le champ appliqué à la surface du rotor, soit $h(0,t)$ suit une loi sinusoïdale au cours du temps, de pulsation $\omega_0 g$.

L'explication de cette notation réside en ce que, en régime asynchrone, la pulsation des grandeurs rotoriques est $\omega_0 g$, ω_0 étant la pulsation du courant statorique et g étant le glissement.

1.3 - RAPPEL DE LA SOLUTION EN HYPOTHESE DE PERMEABILITE CONSTANTE.

Si on suppose que la perméabilité est constante, b est lié à h par :

$$b = \mu_0 \mu h, \quad \mu \text{ étant une constante}$$

Si on suppose que $h(0,t)$ varie selon la loi

$$h(0,t) = H_0 \sqrt{2} \cos \omega_0 g t$$

la solution de (74) et (75) est sinusoïdale et de pulsation $\omega_0 g$; h et j peuvent être remplacés par les nombres complexes $H(z)$ et $J(z)$ avec notamment $H(0) = H_0$.

La solution est :

$$H(z) = H_0 e^{-(1+j) z/\delta}$$

$$J(z) = \frac{1+j}{\delta} H_0 e^{-(1+j) z/\delta}$$

avec :

(76)
$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega_0 g \mu_0 \mu}}} \qquad \text{(perméabilité constante)}$$

Les pertes Joule par unité de surface sont calculées par :

$$\frac{P}{S} = \int_0^\infty \rho \left| J(z) \right|^2 dz$$

(77) $$\boxed{\frac{P}{S} = \rho \frac{|H_o|^2}{\delta}}$$ (perméabilité constante)

La puissance réactive par unité de surface est calculée par (voir 1ère partie § 4.1) :

$$\frac{Q}{S} = \omega_o g \int_o^\infty \mu_o \mu \left| H(z) \right|^2 dz$$

(78) $$\boxed{\frac{Q}{S} = \frac{\rho |H_o|^2}{\delta}}$$ (perméabilité constante)

Les pertes actives et réactives sont égales, donc l'impédance équivalente a pour argument 45°.

Remarque : Les puissances (77) et (78) sont calculées pour la pulsation $g\omega_o$ et correspondent à ce qui est effectivement dissipé dans le rotor. Vues du stator les valeurs ci-dessus doivent être divisées par g.

On a rappelé ici les résultats (77) et (78) surtout pour les comparer avec ce que l'on obtient lorsque la saturation intervient.

1.4 - HYPOTHESE D'UNE COURBE DE MAGNETISATION RECTANGULAIRE.

Nous supposons que la courbe de magnétisation a l'allure de la fig. 17. Il en résulte que, quels que soient z et t, l'induction b ne peut avoir que les deux valeurs $+B_o\sqrt{2}$ et $-B_o\sqrt{2}$, le signe étant celui du champ h(*) ; pour $h=0$, b peut avoir une valeur quelconque, bornée cependant par $B_o\sqrt{2}$. Les équations (74) et (75) sont toujours valables ; en outre, nous considérons que ni h ni j ne peuvent être infinis.

(*) La notation $B_o\sqrt{2}$ pour exprimer la valeur maximale de l'induction est commode pour l'homogénéité de l'exposé, bien qu'à B_o ne puisse être associée une notion de "valeur efficace". En outre, nous omettrons désormais "module" ($|\ |$) associé à H_o ou B_o, dans un but de simplification et du fait qu'il n'y a pas d'ambiguïté.

La solution mathématique du système (74) et (75), avec b et h liés par la courbe fig. 17, et

$$h(o,t) = - H_o \sqrt{2} \sin \omega_o g t$$

est développée en Annexe G. Les résultats sont les suivants :

Au cours d'une demi-période j et h n'existent que jusqu'à une certaine profondeur $z_1(t)$ (croissante en fonction du temps et qui revient brusquement à zéro à la fin de chaque demi-période (voir fig. 18). En fonction de z ($0 < z < z_1(t)$) j est constant et varie au cours du temps comme indiqué fig. 18 ; par ailleurs, à un instant donné, h varie linéairement en fonction de z entre $h(o,t)$ pour $z = 0$ et 0 pour $z = z_1(t)$.

Les expressions analytiques sont, pour la première demi-période :

$$z_1(t) = \delta_s \sin \frac{\omega_o g t}{2}$$

(80) avec $$\boxed{\delta_s = \sqrt{\frac{2 \rho H_o \sqrt{2}}{\omega_o g B_o \sqrt{2}}}}$$ (courbe de magnétisation rectangulaire)

$$j(z,t) = - \frac{2 H_o \sqrt{2}}{\delta_s} \cos \frac{\omega_o g t}{2}$$

$$h(z,t) = \frac{2 H_o \sqrt{2}}{\delta_s} z \cos \frac{\omega_o g t}{2} - H_o \sqrt{2} \sin \omega_o g t$$

Pendant la deuxième demi-période, les grandeurs suivent le même type de loi (voir fig. 18), mais les expressions analytiques sont modifiées pour tenir compte de la discontinuité.

Les puissances active et réactive par unité de surface, calculées selon le même principe qu'au § 1.3, ont pour valeur :

(81) $$\boxed{\frac{P}{S} = \frac{16 \rho |H_o|^2}{3 \pi \delta_s}}$$ (courbe de magnétisation rectangulaire)

(81) $$\frac{Q}{S} = \frac{8\rho |H_0|^2}{3\pi \delta_b}$$ (courbe de magnétisation rectangulaire)

$Q = \frac{P}{2}$ donc l'impédance équivalente a pour argument

$$\text{arc tg } 1/2 = 26,6°.$$

1.5 - DISCUSSION DES HYPOTHESES ADOPTEES.

Ni le modèle du § 1.3., ni celui du § 1.4. ne correspondent aux résultats de l'expérience, du moins en ce qui concerne les phénomènes alternatifs saturés, ce qui est le cas de la marche asynchrone. Pour les turbo-alternateurs, on trouve en effet dans ces conditions :

$\frac{Q}{P} = \frac{X}{R} \sim 0,6$ au lieu de 0,5 obtenu par le modèle du § 1.4.

Une première source d'erreur pouvant expliquer cette anomalie réside dans le fait que nous avons raisonné en supposant que le champ appliqué varie sinusoïdalement au cours du temps, et il en est résulté que les autres grandeurs, notamment le flux, ne varient pas sinusoïdalement au cours du temps. L'impédance du rotor est donc non linéaire, et en conséquence, toutes les grandeurs appliquées au rotor sont déformées, et en particulier le champ magnétique. Pour lever cette contradiction, il faudrait en toute rigueur supposer qu'aucune grandeur ne varie sinusoïdalement, la seule grandeur sinusoïdale étant la tension du réseau qui se trouve séparée du rotor par un certain nombre d'impédances.

Plutôt que de chercher la solution générale à ce problème, nous allons essayer de valider le modèle sinusoïdal, en reprenant les calculs avec l'hypothèse de flux sinusoïdal cette fois, et en comparant les résultats des deux hypothèses. C'est ce qui est fait en annexe H, et les résultats trouvés dans les deux hypothèses sont suffisamment voisins d'une part pour qu'on puisse considérer l'hypothèse du champ sinusoïdal appliqué comme acceptable, malgré le caractère non linéaire du comportement du rotor en régime alternatif, et d'autre part pour qu'il faille chercher ailleurs l'explication de la différence entre théorie et expérience, quant au quotient $\frac{Q}{P}$.

Deux nouvelles sources d'erreur peuvent être envisagées si on discute de la validité de la schématisation de la courbe réelle de magnétisation par le modèle simpliste de la fig. 17.

1.5.1 - La partie verticale de la courbe de magnétisation.

Dans le fer du rotor, la saturation commence à être notable à partir de champs de l'ordre de 2 000 Am^{-1}. Or le champ $H_o\sqrt{2}$, correspondant au courant nominal des machines de grande puissance, a des valeurs de l'ordre de 150 000 à 300 000 Am^{-1}, (en effet, H_o est strictement égal à la densité linéique de courant en valeur efficace). Donc, il est raisonnable d'admettre pour les valeurs élevées de H_o, qu'effectivement tout se passe comme si la saturation apparaissait pour une valeur infiniment petite du champ.

1.5.2 - La partie horizontale de la courbe de magnétisation.

L'induction continue à croître après la saturation, lentement certes, mais sa variation totale peut être sensible, compte tenu de la valeur élevée du champ maximal appliqué.

Dans le paragraphe suivant, on tente de tirer les conséquences théoriques et pratiques de ces deux faits.

1.6 - PRISE EN COMPTE D'UNE COURBE DE MAGNETISATION PLUS REALISTE.

1.6.1 - Modèle théorique.

Lorsque le champ maximal appliqué est élevé, on admet comme raisonnable de considérer une portion verticale de la courbe de magnétisation, mais on remplace les horizontales par des droites d'équation (fig. 19)

$$b = B_o\sqrt{2} + \mu_o h \quad (h > 0) \qquad\qquad b = -B_o\sqrt{2} + \mu_o h \quad (h < 0)$$

Les équations de Maxwell n'ont alors pas de solution analytique simple.

On va essayer d'évaluer quelles modifications l'adoption de cette nouvelle loi apporte par rapport aux résultats du § 1.4.

Les raisonnements du paragraphe suivant n'ont qu'un caractère très approché, et permettent simplement de se rendre compte dans quel sens les phénomènes sont modifiés. La principale justification réside dans le calcul numérique exposé au § 1.6.3., dont on verra qu'il présente une bonne concordance avec les considérations du § 1.6.2.

1.6.1 - Evaluation des modifications apportées par le nouveau modèle.

On suit pas à pas les calculs de l'Annexe G.

Dans les équations du § G.1 et du début du § G.2 interviennent de nouveaux termes dus au fait que l'induction est maintenant susceptible de varier de façon continue en fonction de z. En essayant d'évaluer l'importance de ces nouveaux termes on s'aperçoit qu'elle est faible, du moins tant que le champ maximal $H_0\sqrt{2}$ reste relativement faible devant $\frac{B_0\sqrt{2}}{2\mu_0}$ Dans le cas des turboalternateurs cette condition peut être considérée comme respectée.

On peut alors en déduire que la distance z_1 du front d'inversion de l'induction suivra une loi voisine de la loi précédemment trouvée, à savoir

$$z_1(t) \simeq \delta_s \sin \frac{\omega_0 g t}{2} \qquad \text{avec} \qquad \delta_s \simeq \sqrt{\frac{2\rho H_0\sqrt{2}}{\omega_0 g B_0\sqrt{2}}}$$

On peut aussi considérer :

Qu'au-delà de $z_1(t)$ j et h sont nuls (mais pas b qui ne peut alors avoir que la valeur $\pm B_0\sqrt{2}$ jusqu'à δ_s, pour permettre à $z_1(t)$ d'être toujours croissant, selon la loi de la fig. 18).

La continuité de $h(z,t)$ en fonction de z exige que h varie de façon continue entre $h = -H_0\sqrt{2}\sin\omega gt$ pour $z = 0$ et $h = 0$ pour $z = z_1(t)$ (si h était discontinu, $j = \partial h / dz$ serait infini) donc $\int_0^{z_1(t)} h\, dz$ a sensiblement la même valeur qu'au § 1.4. - en vertu de (74)

Donc, à tout instant, le courant total dans le fer est sensiblement le même que précédemment, seule sa distribution est modifiée, nous supposons que cette modification est légère et qu'en conséquence les pertes actives sont inchangées (si j, au lieu d'être constant en fonction de z, variait linéairement avec une pente ε en gardant la même valeur moyenne, les pertes augmenteraient comme ε^2)

On peut alors considérer qu'entre o et $z_1(t)$, la distribution de j s'écarte assez peu d'une constante pour que la loi de variation de h avec z

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z} = -j\right)$$

reste à peu près linéaire, c'est-à-dire ait la valeur du § 1.4 :

$$h(z,t) = \frac{2H_0\sqrt{2}}{\delta_s}\, z \cos\frac{\omega_0 g t}{2} - H_0\sqrt{2}\sin\omega_0 g t$$

En conséquence, la seule modification notable introduite par la nouvelle hypothèse est que b suivra la loi (de 0 à ζ_1 et de $t=0$ à $t=\frac{\pi}{\omega_0 g}$)

$$b(\zeta,t) = -B_0\sqrt{2} - \mu_0 H_0 \sqrt{2} \sin \omega_0 g t$$

$$+ \frac{2\mu_0 H_0 \sqrt{2}}{\delta_s} \zeta \cos \frac{\omega_0 g t}{2}$$

donc à la puissance réactive précédente correspondant au produit de $B_0\sqrt{2}$ par $h(\zeta,t)$ s'ajoute un terme correspondant à $\mu_0 h^2(\zeta,t)$, ce qui correspond bien, conformément aux résultats de l'expérience, à un rapport $\frac{Q}{P}$ supérieur à la valeur 0,5, donnée par la théorie du § 1.4.

1.6.3 - Vérification par le calcul des hypothèses du § 1.6.2. et de leurs conséquences.

Les équations (74) et (75) ont été résolues par intégration numérique, avec les conditions suivantes :

- le champ tangentiel appliqué à la surface suit la loi :

$$h(o,t) = -H_0\sqrt{2} \sin \omega_0 g t$$

- le champ h et l'induction b sont reliés par la courbe réelle de magnétisation (voir fig. 20) ; au-delà de $h = 200\,000\ Am^{-1}$ la courbe se prolonge par une droite de pente μ_0.

Il est inutile de considérer g comme un paramètre de l'étude, car pour une valeur donnée de $H_0\sqrt{2}$ toutes les grandeurs suivent des lois en g de même nature que celles précédemment trouvées ; on a donc effectué le calcul avec les valeurs suivantes des paramètres physiques :

$$\omega_0 = 314\ rad/sec$$

$$g = 1$$

$$\rho = 25.10^{-8}\ \Omega m$$

1.6.3.1 - Confrontation des résultats numériques avec les hypothèses 1.6.2.

On a tout d'abord voulu vérifier que les hypothèses adoptées en 1.6.2. se trouvaient en conformité acceptable avec le calcul, à savoir que, à un instant t_1, le champ suit une loi à peu près linéaire entre les valeurs :

$$h(o,t) = -H_0\sqrt{2} \sin \omega_0 g t \qquad pour \qquad \zeta = 0$$

et $h(z_1, t_1) = 0$ pour $z = z_1 = \delta_s \sin \frac{\omega_0 g t_1}{2}$

avec : $$\delta_s = \sqrt{\frac{2 \rho H_0 \sqrt{2}}{\omega_0 g B_0 \sqrt{2}}}$$

La comparaison a été faite pour les valeurs ci-dessus indiquées de $B_0\sqrt{2}$, ω_0, g et ρ et pour $H_0\sqrt{2} = 5.10^5\ A_m^{-1}$.

En ce qui concerne $B_0\sqrt{2}$ on a adopté la valeur 2,05 T pour les raisons qui seront indiquées en 1.7.1.a. δ_s est alors égal à 0,02 m.

Les instants considérés sont caractérisés par les valeurs suivantes de $\omega_0 g t_1$:

$\omega_0 g t_1 = \frac{\pi}{3}$ (fig. 21a)

$\frac{\pi}{2}$ (fig. 21b)

$\frac{2\pi}{3}$ (fig. 21c)

$\frac{3\pi}{4}$ (fig. 21d)

La concordance satisfaisante des courbes idéales et des points réellement calculés laisse prévoir que les conclusions des hypothèses 1.6.2. à savoir :

- puissance active P donnée par la formule (80) avec δ_s donné par (79)

- puissance réactive supérieure à 0,5 P,

vont se trouver confirmées, du moins tant que la courbe de magnétisation ne s'éloigne pas trop de la forme idéale de la fig. 19, c'est-à-dire à condition que $H_0\sqrt{2}$ soit suffisamment élevé.

C'est ce que nous allons examiner.

1.6.3.2. Valeurs de puissance active et réactive obtenues par le calcul numérique.

Les valeurs de puissance active et réactive par unité de surface $\frac{P}{S}$ et $\frac{Q}{S}$ ainsi que la quantité $tg\,\varphi = \frac{Q}{P}$ obtenues par le calcul numérique, sont représentées fig. 22, 23 et 24 par la courbe en trait plein, en fonction du champ maximal appliqué $H_0\sqrt{2}$.

Sur la fig. 22 les cercles représentent les valeurs de $\frac{P}{S}$ obtenues par la formule (80).

On constate la parfaite concordance des valeurs de $\frac{P}{S}$ pour $H_o > 60000\ Am^{-1}$.

On constate également fig. 24 que, comme prévu, $tg\,\varphi > 0{,}5$; mais on constate aussi que pour $H_o\sqrt{2} > 60000\ Am^{-1}$ on peut adopter une valeur unique de $tg\,\varphi$ par exemple, $tg\,\varphi = 0{,}615$.

Par contre, lorsque $H_o\sqrt{2}$ décroît à partir de $60000\ Am^{-1}$ la théorie saturée est de moins en moins valide et on tend vers la théorie linéaire ($tg\,\varphi$ tend vers 1). Un modèle amélioré pour ce cas est proposé au § 1.7.3.2.

1.6.3.3. Distribution des pertes en profondeur.

Dans certains problèmes (par exemple contraintes mécaniques locales lors d'un démarrage asynchrone) on s'intéresse à la distribution en profondeur des pertes dont le calcul précédent ne donne que la valeur globale vue de la surface. Le calcul numérique a permis de montrer que, du moins pour les valeurs élevées du champ ($H_o \geqslant 60000\ Am^{-1}$) , les pertes actives par unité de volume se répartissent selon une loi linéaire en ζ, maximale à la surface et s'annulant à la profondeur δ_s donnée par (69) soit la loi, (en appelant $\frac{P}{V}(\zeta)$ les pertes par unité de volume à la profondeur ζ) :

$$\frac{P}{V}(\zeta) = \frac{P}{V}(o)\left[1 - \frac{\zeta}{\delta_s}\right]$$

avec

$$\frac{P}{V}(o) = \frac{2}{\delta_s}\,\frac{P}{S}\ .$$

1.7 - ELABORATION D'UN MODELE LINEAIRE REPRESENTANT LA PERMEABILITE EN REGIME SATURE.

1.7.1 - Conséquence de l'étude du § 1.4. et de son perfectionnement au § 1.6.

En présence de la courbe de magnétisation réelle, et en régime alternatif, on peut dire que :

a) pour un champ maximal appliqué $H_o\sqrt{2} \geqslant 60000\ Am^{-1}$ les relations (79) et (80) continuent à être applicables.

La grandeur $B_o\sqrt{2}$ (voir fig. 19) n'est pas définie de façon précise lorsqu'on veut utiliser la courbe de magnétisation réelle.

On convient alors de définir $B_o\sqrt{2}$ (et de l'appeler dans ce cas $B_s\sqrt{2}$) comme l'induction correspondant à $60\ 000\ Am^{-1}$ sur la courbe de magnétisation réelle. Cette définition présente l'avantage d'être sans ambiguïté, et la

valeur 60 000 Am^{-1} a été choisie comme correspondant bien à la meilleure approximation de la courbe de magnétisation réelle par la courbe idéale fig. 19.

δ_s et $\frac{P}{S}$ devront donc être donnés par :

(82) $$\delta_s = \sqrt{\frac{2\rho H_0 \sqrt{2}}{\omega_0 g B_s \sqrt{2}}}$$

(80) $$\frac{P}{S} = \frac{16\rho |H_0|^2}{3\pi \delta_s}$$

Par contre la relation (81) devra être remplacée par

(83) $$\frac{Q}{P} = tg\,\varphi = 0,615$$

(la valeur correspondante de φ est 31,5°)

b) Lorsque $H_0 \sqrt{2} < 60000\ Am^{-1}$ l'approximation ci-dessus n'est plus valable et le comportement tend progressivement vers le cas à perméabilité constante. Ce cas présente moins d'intérêt pratique ; cependant, au § 1.7.3.2. seront proposées des formules approchées pour ce cas.

1.7.2 - Principe de base du modèle linéaire ; introduction d'une perméabilité relative complexe.

On cherche à aménager les équations de Maxwell de façon qu'elles conduisent aux valeurs de puissance active et réactive trouvées au § 1.6.3.2. Du fait que le quotient $\frac{Q}{P}$ est différent de 1, ce résultat ne peut être obtenu qu'en introduisant une perméabilité relative complexe $\overline{\mu}$ (*

On pose donc, en régime sinusoïdal de pulsation $\omega_0 g$, dans le schém unidimensionnel, et en valeurs efficaces :

(*) Dans tout l'ensemble de cet exposé, on a choisi de ne pas adopter de signe distinctif pour les nombres complexes et de distinguer le module d'un nombre complexe α par la notation $|\alpha|$. Nous ferons une exception pour la seule perméabilité relative. Sa valeur complexe sera donc notée :

$$\overline{\mu}$$

et son module μ (ceci par souci d'homogénéité avec la 1ère partie où μ désignait toujours un nombre réel).

$$B = \mu_0 \bar{\mu} H$$

$$\frac{dH}{dz} = -J \quad (\text{d'après } \overrightarrow{\text{rot}\, H} = \vec{J})$$

$$\frac{dJ}{dz} = -\frac{j\omega_0 g \mu_0 \bar{\mu}}{\rho} H \quad (\text{d'après } \overrightarrow{\text{rot}\, E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

le nombre complexe $\bar{\mu}$ étant caractérisé par son module et son argument, soit :

$$\bar{\mu} = \mu e^{-j\theta}$$

Ce système se résout classiquement, en posant :

$$\beta^2 = \frac{\omega_0 g \mu_0 \mu}{\rho} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

ou encore :

$$\beta = \frac{\sqrt{2}}{\delta'} e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

avec :

(84)
$$\delta' = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega_0 g \mu_0 \mu}}$$

et en tenant compte des conditions initiales :

$H = H_0$ pour $z = 0$

$H = 0$ pour $z = \infty$

$$H(z) = H_0 e^{-\beta z}$$

$$J(z) = \beta H_0 e^{-\beta z}.$$

La puissance apparente complexe par unité de surface, c'est-à-dire correspondant à tout le demi-espace infini situé sous l'unité de surface, s'obtient par la relation :

$$\frac{P + jQ}{S} = \rho \int_0^\infty |J(z)|^2 \, dz + j\omega_0 g \int_0^\infty B(z) H^*(z) \, dz$$

H^* signifiant imaginaire conjugué de H ce qui donne, tous calculs faits :

(85) $$\frac{P}{S} = \frac{\rho |H_o|^2 \sqrt{2} \cos\varphi}{\delta'}$$

(avec courbe de magnétisation réelle; à comparer avec (77) et (80))

(86) $$\frac{Q}{S} = \frac{\rho |H_o|^2 \sqrt{2} \sin\varphi}{\delta'}$$

(avec courbe de magnétisation réelle, à comparer avec (78) et (81))

L'angle φ (tel que $\cos\varphi$ représente le "facteur de puissance" propre au fer, ou encore tel que $tg\,\varphi = \frac{Q}{P}$) est relié à $-\theta$, argument de $\bar{\mu}$ par la relation :

(87) $$\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

L'identification avec les formules ou résultats précédents permet de déterminer δ' et φ pour chaque valeur de $H_o\sqrt{2}$. Dans le paragraphe suivant nous allons proposer des formules simplifiées rendant l'utilisation de (85) et (86) aussi simple que possible.

Remarque importante : Du fait que $\bar{\mu}$ est une fonction de $H_o\sqrt{2}$, le problème ne pourra généralement être résolu que par itérations ; il faut en outre noter que $H_o\sqrt{2}$ amplitude du champ tangentiel appliqué au fer, peut varier d'un point à l'autre d'une machine réelle ; on considérera alors que la valeur de $\bar{\mu}$, correspondant à cette valeur de $H_o\sqrt{2}$ est valable dans tout le domaine situé en-dessous de l'élément de surface auquel est appliqué H_o . Suivant que cet élément de surface est plan ou cylindrique, le domaine correspondant est un prisme ou un cylindre.

1.7.3 - Calcul pratique des paramètres caractéristiques du modèle linéaire.

1.7.3.1. Lorsque $H_o\sqrt{2} \geq 60000\ Am^{-1}$

Dans ce cas, on se base sur le modèle schématique proposé au § 1.7.1. - dans lequel l'angle φ à une valeur constante :

(88) $$\varphi = 31,5^\circ \qquad tg\,\varphi = 0,615 \qquad \cos\varphi = 0,85 \qquad \sin\varphi = 0,525$$

La comparaison de (80) et (85) donne alors :

(89) $$\frac{\delta'}{\delta_s} = 0{,}707$$

le fait que l'on trouve ici un nombre sensiblement égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ s'interprète assez bien si on considère que δ_s est une profondeur de pénétration maximale et que δ' est la profondeur de pénétration "effective" qui lui correspond dans un modèle linéarisé.

Il est plus commode d'exprimer alors δ' en composant (82) et (89) :

(90) $$\boxed{\delta' = \sqrt{\frac{\rho H_o \sqrt{2}}{\omega_o g B_s \sqrt{2}}}}$$ (courbe de magnétisation réelle).

On est donc en mesure de calculer simplement δ' , d'où $\frac{P}{S}$ et $\frac{Q}{S}$ d'après (85) et (86).

Mais on peut également, si on le désire, introduire directement la perméabilité relative complexe $\overline{\mu}$ dans les équations de Maxwell. Compte tenu de (84) et (90) d'une part, et (87) et (88) d'autre part, $\overline{\mu}$ est caractérisé par :

(91) $$\left.\begin{array}{l} \mu = \dfrac{2 B_s \sqrt{2}}{\mu_o H_o \sqrt{2}} \\ \\ \theta = 27° \end{array}\right\} \quad \overline{\mu} = \mu e^{-j\theta}$$

Il faut noter cependant que le modèle linéarisé introduit une erreur dans la distribution des pertes à l'intérieur du matériau. Lorsqu'on voudra analyser ces pertes il sera donc préférable, une fois résolu le modèle analytique, d'utiliser la formule du § 1.6.3.3., avec δ_s donné par (82), pour évaluer la distribution des pertes.

1.7.3.2. Lorsque $H_o \sqrt{2} < 60000\ Am^{-1}$

Une étude détaillée de ce cas ne présente pas un grand intérêt pratique. Il est possible cependant de proposer des expressions simples de φ et μ permettant de faire la transition entre l'hypothèse non saturée et l'hypothèse saturée.

- Appelons μ_1 la perméabilité relative du matériau non saturé,

- μ_2 la perméabilité relative moyenne, pour une valeur quelconque $H_o \sqrt{2}$ du champ maximal, c'est-à-dire

(92) $$\mu_2 = \frac{B_o\sqrt{2}}{\mu_o H_o \sqrt{2}}$$

($H_o\sqrt{2} < 60000$ et $B_o\sqrt{2}$ étant l'induction correspondant à $H_o\sqrt{2}$ sur la courbe de magnétisation).

Alors les paramètres θ et μ caractéristiques de la perméabilité relative complexe $\underline{\mu}$ correspondant au champ de valeur efficace H_o peuvent être obtenus en toute première approximation par les formules :

(93) $$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = tg\,\varphi = \frac{3\mu_1 + 2\mu_2}{5\mu_1}$$

(94) $$\frac{2}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$$

On retrouve bien les deux limites :

Lorsque $H_o\sqrt{2} \longrightarrow 0$, $\mu_2 \longrightarrow \mu_1$, d'où $\mu \longrightarrow \mu_1$ et $tg\,\varphi \longrightarrow 1$ (donc $\underline{\mu}$ devient réel d'après (87)) ; lorsque $H_o\sqrt{2} \longrightarrow 60000$, $tg\,\varphi$ tend vers un nombre légèrement supérieur à 0,6 (car alors $\mu_2 \ll \mu_1$) ce qui est bien conforme à (88) et μ tend vers $2\mu_2$ ce qui est bien conforme à (91) et (92).

En raison du faible apport énergétique des zones où le champ est inférieur à 60 000 Am^{-1}, les contraintes mécaniques n'y seront généralement pas préoccupantes et on pourra adopter, pour la distribution des pertes, par souci d'homogénéité la loi du § 1.6.3.3.

Les valeurs de μ et $tg\,\varphi$ sont alors reportées dans les relations (84), (85) et (86), d'où on déduit les valeurs de $\frac{P}{S}$ et $\frac{Q}{S}$ en fonction du champ maximal appliqué : $H_o\sqrt{2}$. Les points calculés par cette méthode, pour $H_o\sqrt{2} < 60000$ Am^{-1} sont représentés par des croix sur les fig. 22, 23 et 24, on constate que la concordance avec le calcul numérique (courbes en trait plein) est satisfaisante.

1.7.3.3. Influence de la courbure.

Lorsque la profondeur de pénétration n'est plus faible devant le rayon, la résolution en coordonnées cartésiennes devrait être remplacée par une résolution en coordonnées polaires, comme cela a été montré en annexe A de la 1ère partie.

Nous admettrons que les résultats de l'étude faite dans l'Annexe A peuvent être transposés ici, c'est-à-dire que les valeurs de $\frac{P}{S}$ et $\frac{Q}{S}$ calculées dans le présent chapitre, doivent être affectées des coefficients correcteurs donnés par les formules (A.43) à (A.46) de l'annexe A

dans laquelle D_ℓ représentera le diamètre extérieur du domaine considéré, et δ la profondeur de pénétration effective, appelée δ' dans le présent chapitre.

1.7.3.4. Récapitulation de la mise en oeuvre du modèle linéarisé tenant compte de la saturation.

Le tableau I ci-après résume la mise en oeuvre et le déroulement du calcul de prise en compte de la saturation.

1.8 - CONCLUSIONS.

En régime alternatif saturé, et dans la mesure où on connaît la valeur maximale du champ tangentiel appliqué en tout point de la surface du fer massif, l'étude des phénomènes énergétiques globaux et locaux peut se faire en utilisant les équations de Maxwell en notation complexe (élimination de la variable temps) et linéarisées grâce à l'introduction d'une perméabilité relative complexe $\underline{\mu}$ L'expression de cette perméabilité est particulièrement simple lorsque le champ tangentiel appliqué est suffisamment élevé (pratiquement supérieur à 60000 $A.m^{-1}$).

TABLEAU I

Résumé des calculs pour la prise en compte de la saturation et de la courbure

	Non saturé (perméabilité constante)	Saturé (courbe telle que fig. 20 - par exemple)	
1. **Données**	ω_0 g ρ		
Pulsation de base glissement résistivité perméabilité			
2. **Calculs intermédiaires**	$\mu_0 \mu$ H_0 = valeur efficace du champ tangentiel appliqué	Courbe de magnétisation $b = f(h)$ ou $B\sqrt{2} = f(H\sqrt{2})$ Soit $H_0\sqrt{2}$ le champ maximal appliqué et $B_0\sqrt{2}$ l'induction correspondante $B_0\sqrt{2} = f(H_0\sqrt{2})$	
		$H_0\sqrt{2} \geq 60000\ Am^{-1}$ soit $B_s\sqrt{2} = f(60000)$ $\mu = \dfrac{2B_s\sqrt{2}}{\mu_0 H_0\sqrt{2}}$ $tg\,\varphi = 0{,}615$	$H_0\sqrt{2} < 60000\ Am^{-1}$ On pose : $\mu_1 = \lim_{h \to 0} \dfrac{b}{\mu_0 h}$ et $\mu_2 = \dfrac{B_0\sqrt{2}}{\mu_0 H_0\sqrt{2}}$ d'où : $\mu = \dfrac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$ et $tg\,\varphi = \dfrac{3\mu_1 + 2\mu_2}{5\mu_1}$
3. **Résultat final**	$\delta = \sqrt{\dfrac{2\rho}{\mu_0 \mu\, \omega_0 g}}$ $\dfrac{P}{S} = \dfrac{\rho H_0^2}{\delta}$ $\dfrac{Q}{S} = \dfrac{\rho H_0^2}{\delta}$	$\delta' = \sqrt{\dfrac{2\rho}{\mu_0 \mu\, \omega_0 g}}$ $\dfrac{P}{S} = \dfrac{\rho H_0^2 \sqrt{2} \cos\varphi}{\delta'}$ $\dfrac{Q}{S} = \dfrac{\rho H_0^2 \sqrt{2} \sin\varphi}{\delta'}$	
4. **Prise en compte de la courbure**	$\frac{P}{S}$ et $\frac{Q}{S}$ multipliés par les coefficients des formules (A.43) à (A.46) de l'Annexe A (1ère partie) avec D_r diamètre caractérisant la courbure du domaine considéré et δ remplacé par δ (non saturé) ou δ' (saturé)		

Chapitre 2

PRISE EN COMPTE DE LA SATURATION DANS LE CAS DES TURBO-ALTERNATEURS ETUDE PARTICULIERE DE LA MARCHE ASYNCHRONE

2.1 - INTRODUCTION.

La théorie développée au Chapitre 1 concerne principalement les régimes du type "asynchrone", c'est-à-dire au cours desquels le rotor tourne à une vitesse régulière différente de la vitesse du champ tournant.

Ces régimes se caractérisent par le fait que le glissement est normalement assez faible (inférieur à 0,1 lors d'une marche asynchrone consécutive à une rupture de synchronisme, et inférieur à 0,01 lors des essais réalisés en centrale), et que le champ tangentiel appliqué varie alternativement avec une valeur de l'ordre de la valeur correspondant au courant nominal, ce qui correspond bien aux hypothèses de la théorie du Chapitre 1.

Cependant, il semble envisageable d'étendre dans une étape ultérieure, la validité des résultats obtenus à l'étude des grandes oscillations autour d'un régime permanent synchrone, oscillations consécutives à des perturbations importantes mais n'entraînant pas la perte de synchronisme. Le point délicat de cette extension, qui ne sera pas abordée ici, est la décroissance progressive de la saturation lorsque les oscillations s'amortissent et tendent vers le retour à l'équilibre en passant par un régime de petites oscillations pour lesquels on a vu dans la première partie que la saturation pouvait être considérée comme constante.

2.2 - CAS IDEAL DU ROTOR CYLINDRIQUE HOMOGENE, CONSTITUE PAR UN MATERIAU FERROMAGNETIQUE.

L'étude faite au Chapitre I de cette deuxième partie s'étend sans difficulté aux résultats de l'étude faite en Annexe A.

Les expressions (A.47) à (A.50) doivent être transformées conformément aux expressions (75) et (76) du Chapitre I ; elles deviennent donc :

(95)
$$P_r = \frac{\pi \rho L D_r \sqrt{2}\, k_{r\mu} \cos\varphi}{\delta'} \left| \frac{12 \mu n'_s I_r}{\pi D_r} \right|^2$$

(96) $$Q_r = \frac{\pi \rho L D_r \sqrt{2}\, k_{x\mu} \sin\varphi}{\delta'} \left| \frac{12 \mu n'_s I_r}{\pi D_r} \right|^2$$

(97) $$R_r = \frac{48 \rho \mu^2 L n'_s \sqrt{2}\, k_{r\mu} \cos\varphi}{\delta'}$$

(98) $$X_r = \frac{48 \rho \mu^2 L n'^2_s \sqrt{2}\, k_{x\mu} \sin\varphi}{\delta'}$$

avec :

(99) $$\delta' = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \mu \omega_0 g}}$$

Selon la valeur du champ maximal appliqué $H_0\sqrt{2}$ qui est ici égal à :

$$\frac{12 \mu n'_s I_r \sqrt{2}}{\pi D_r}$$

on déterminera μ soit par (91) soit par (94), et φ soit par (88) soit par (93).

Dans les coefficients $k_{r\mu}$ et $k_{x\mu}$ donnés par (A.43) à (A.46), il conviendra de remplacer δ par δ' donné par (99).

Naturellement, comme les paramètres caractéristiques de la saturation sont fonction du champ $H_0\sqrt{2}$, proportionnel au courant I_r, les calculs relatifs à un régime asynchrone sont nécessairement itératifs.

2.3 - CAS D'UN ROTOR DE TURBO-ALTERNATEUR.

En plus des problèmes qui viennent d'être évoqués le rotor du turbo-alternateur pose celui de la prise en compte des dents. La solution que nous proposons consiste à utiliser le modèle de la 1ère partie, dans lequel la perméabilité était considérée comme constante, et à appliquer aux zones sous les encoches les résultats du précédent Chapitre 1, qui ont justement été établis pour des domaines à frontières cylindriques. La prise en compte de la saturation dans les dents (de la zone polaire et de la zone bobinée) a été effectuée de façon plus sommaire, d'une part en raison de leur moindre importance énergétique, et d'autre part parce que les variations de champ

magnétique y sont généralement d'amplitude relativement faible (excédant rarement 10 à 20 000 Am^{-1}, ce qu'on peut constater grâce au calcul local du champ.

Nous allons donc examiner successivement comment la saturation est prise en compte dans les zones a , b , c , d (voir fig. 10, 11 et 12 de la 1ère partie).

2.3.1 - Zones a et c.

En ce qui concerne les zones a et c où le fer massif constitue les dents, la théorie ayant conduit à l'introduction d'une perméabilité relative complexe ne s'applique pas à elles puisque ces dents ne constituent pas des volumes cylindriques. Pour ces zones on adopte une perméabilité relative non complexe, mais dont le module est cependant ajusté en fonction du champ appliqué au fer. Ce champ a été choisi égal à la valeur crête du champ moyen appliqué à la surface des dents lors de la 1ère partie; on calcule donc le module de H_{az40} donné par (17) et de H_{cz40} donné par (22), multipliés par $\sqrt{2}$ pour obtenir la valeur crête.

De ces champs, on déduit les perméabilités relatives correspondantes par les formules (91) ou (94).

2.3.2 - Zones b et d.

En ce qui concerne les zones b et d on considère qu'elles constituent des portions de cylindres homogènes et que, notamment, elles sont bordées par des surfaces cylindriques. On leur appliquera donc directement les résultats du Chapitre I précédent.

Pour la zone b , on considérera que la saturation est caractérisée par le champ H_{bz80} (l'explication en sera donnée au § 2.4). H_{bz80} doit donc être substitué à H_o au § 1.7.3. du Chapitre précédent.

On en déduit :

$$\underline{\mu}_b = \mu_b \, e^{-j\theta_b}$$ en module et argument, par (91) ou (93) et (94).

Ces valeurs se répercuteront itérativement sur H_{bz80} , car H_{bz80} est d'après (13) dépendant de k_{a3} , et dans l'expression (15) de k_{a3} il convient de remplacer μ_b par sa valeur complexe $\underline{\mu}_b$ ce qui concerne aussi bien $\underline{\mu}_b$ proprement dit que :

$$\beta_b = \sqrt{\frac{j\omega_o g \mu_o \underline{\mu}_b}{\rho}}$$

Il reste alors à ajuster aussi le calcul de P_{b8} et Q_{b8}, donné par les formules (D.21) et (D.22). Le procédé est le même qu'au § 2.2 ci-dessus :

P_{b8} doit être multiplié par $\sqrt{2} \cos \varphi_b$

Q_{b8} doit être multiplié par $\sqrt{2} \sin \varphi_b$

avec :

$$\varphi_b = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta_b}{2}$$

δ_b doit être remplacé par $\delta'_b = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_o \mu_b \omega_o g}}$ et cette substitution concerne aussi les coefficients $k_{r/\mu}$ et $k_{x/\mu}$.

Pour la zone d, on considérera que la saturation est caractérisée par le champ $H_{dg\,80}$ (l'explication en sera donnée au § 2.4) $H_{dg\,80}$ doit donc être substitué à H_o au § 1.7.3 - du chapitre précédent. On en déduit: $\overline{\mu}_d = \mu_d \, e^{-j\theta_d}$ en module et argument, par (91) ou (93) et (94).

Ces valeurs se répercutent itérativement sur $H_{dg\,80}$, car $H_{dg\,80}$ est d'après (22) dépendant de k_{c2}, et dans l'expression (22) de k_{c2} il convient de remplacer μ_d par sa valeur complexe $\overline{\mu}_d$ ce qui concerne aussi bien $\overline{\mu}_d$ proprement dit que :

$$\beta_d = \sqrt{\frac{j\omega_o g \mu_o \overline{\mu}_d}{\rho}}$$

Il reste alors à ajuster le calcul de P_{d8} et Q_{d8}, donnés par les formules (D.42) et (D.43). Le procédé est le même qu'au § 2.2. ci-dessus :

P_{d8} doit être multiplié par $\sqrt{2} \cos \varphi_d$

Q_{d8} doit être multiplié par $\sqrt{2} \sin \varphi_d$

avec :

$$\varphi_d = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta_d}{2}$$

δ_d doit être remplacé par $\delta'_d = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_o \mu_d \omega_o g}}$

et cette substitution concerne aussi les coefficients $k_{r/\mu}$ et $k_{x/\mu}$.

2.4 - CALCULS ITERATIFS EN MARCHE ASYNCHRONE.

Un régime de marche asynchrone établi est caractérisé d'une part par le glissement, d'autre part par la tension appliquée soit aux bornes de la machine, soit en amont de celle-ci par l'intermédiaire d'une impédance de liaison connue. Le détail des calculs sera indiqué au § 2.5. Pour le moment, nous considérons seulement le processus itératif.

La résolution des schémas équivalents (fig. 9a et 9 b) nécessite la connaissance de la saturation en tous points, notamment au fond des encoches. S'il fallait en tenir compte rigoureusement, le calcul serait extrêmement compliqué mais il est possible d'opérer une grande simplification, dans l'évaluation de la saturation, en supposant que la machine ne s'éloigne pas trop d'une machine isotrope.

En effet, dans un tel cas, $H_{dz\,80}$ et $H_{bz\,80}$ seraient égaux et à tout emplacement angulaire θ la saturation serait donnée par le champ :

$$\sqrt{H^2_{dz\,80}\,\sin^2 p\theta + H^2_{bz\,80}\,\cos^2 p\theta} = H_{dz\,80} = H_{bz\,80}.$$

Autrement dit, si on considère que le turbo-alternateur est peu anisotrope, on peut admettre que le champ tangentiel appliqué au fond des encoches, en régime asynchrone, est peu variable en fonction de l'angle, et qu'en conséquence il suffit de caractériser la saturation dans la zone b par le champ $H_{bz\,80}$, qui sera lui-même évalué, à l'aide du courant i_{rd} et dans la zone d par le champ $H_{dz\,80}$, qui sera lui-même évalué à l'aide du courant i_{rq}. De la sorte, on réalise l'indépendance des deux axes en ce qui concerne la saturation.

On part donc de deux valeurs arbitraires de $H_{bz\,80}\sqrt{2}$ et $H_{dz\,80}\sqrt{2}$. On en déduit toutes les impédances des schémas équivalents. La résolution traitée au paragraphe suivant donne en particulier les courants i_{rd}(*) et i_{rq}. De i_{rd} on déduit :

$$H_a = i_{rd}\,A_r \quad \text{puis} \quad H_{bz\,80} \quad \text{par} \quad (13)$$

de i_{rq} on déduit :

$$H_c = i_{rq}\,A_r \quad \text{puis} \quad H_{dz\,80} \quad \text{par} \quad (22)$$

et ces nouvelles valeurs de champ à fond d'encoche sont prises pour nouvelles bases pour la saturation dans les zones correspondantes, etc...

(*) dans le cas où l'inducteur n'est pas à circuit ouvert (cas de la fig. 9a) c'est évidemment le courant dans la seule branche rd qui doit être considéré ici pour évaluer la saturation.

2.5 - CALCUL DES GRANDEURS CARACTERISANT LE RÈGIME ASYNCHRONE.

Sur les fig. 9a et 9b, les schémas équivalents sont ramenés à la fréquence fondamentale ω_o et donnent la relation :

- dans l'axe direct, entre la tension $j\,\omega_o\,\psi_d$, le courant i_d et l'impédance z_d, nombres complexes fonctions de g.
- dans l'axe quadrature, entre la tension $j\,\omega_o\psi_q$, le courant i_q et l'impédance z_q, nombres complexes fonctions de g.

Nous supposons que la tension aux bornes est caractérisée par ses composantes v_d et v_q (nombres complexes) et que la machine est reliée au réseau infini par une impédance assimilable à une inductance pure l_e (donc d'impédance complexe $z_e = j\,\omega_o\,l_e$ à la pulsation fondamentale). La résistance du stator et de la résistance de liaison sont négligées, jouant un rôle faible dans ce problème.

Les grandeurs vues du réseau infini seront caractérisées par l'indice r :

$|v_r|$ amplitude de la tension en valeur réduite, de composantes (complexes

$$v_{dr} = |v_r| \qquad v_{qr} = j\,|v_r| \qquad \text{(Voir Bibl. [17])}$$

ψ_{dr} et ψ_{qr} , flux associés, tels que

$$|v_r| = v_{dr} = -\omega_o\,\psi_{qr}$$

$$j\,|v_r| = v_{qr} = \omega_o\,\psi_{dr} \qquad \text{(Voir Bibl. [17])}$$

i_d et i_q sont les mêmes que ci-dessus, et d'autre part, par analogie avec les fig. 9a et 9b :

$$j\,\omega_o\,\psi_{qr} = i_q\,(z_e + z_q)$$

$$j\,\omega_o\,\psi_{dr} = i_d\,(z_e + z_d)$$

De ces relations, utilisant les équations de Park (1), il est facile de passer en régime aux bornes de la machine elle-même, il vient :

$$v_d = j\,g\,\omega_o\,l_e\,i_d - g\,\omega_o\,l_e\,i_q + j\,z_q\,i_q$$

$$v_q = j\,g\,\omega_o\,l_e\,i_q + g\,\omega_o\,l_e\,i_d - j\,z_d\,i_d$$

Les quantités $j g \omega_o l_e (i_d + j i_q)$ et $j g \omega_o l_e (i_q - j i_d)$ qui sont proportionnelles à j près, peuvent être négligées ci-dessus si on ne s'écarte pas trop des 3 conditions ci-dessous prises dans leur ensemble :

- g faible
- $j l_e \omega_o = z_e$ faible devant z_d et z_q
- machine pas trop anisotrope ($\Longrightarrow j i_d \simeq i_q$)

Moyennant ces conditions, on peut donc écrire en régime asynchrone:

$$v_d \# j z_q i_q$$

$$v_q \# - j z_d i_d$$

(N.B.- Il faut bien voir que cette approximation revient à négliger l'influence des battements qui se manifestent à la pulsation $2 g \omega_o$ du fait de l'anisotropie principalement).

Enfin pour les grandeurs électriques aux bornes de la machine, on peut écrire, toujours moyennant la même approximation :

$$|v| = \left| \frac{v_d - j v_q}{2} \right|$$

$$|i| = \left| \frac{i_d - j i_q}{2} \right|$$

$$\mu = \frac{1}{2} R_e \left\{ v_{dr} i_d^* + v_{qr} i_q^* \right\}$$

$$= \frac{v_r}{2} \left(R_e \left\{ i_d^* \right\} - Im \left\{ i_q^* \right\} \right)$$

(μ sera négatif conformément aux conventions de signe de Bibl. [17])

$$q = \sqrt{|v|^2 \, |i|^2 - \mu^2}$$

Au signe près, μ représente aussi le couple asynchrone en valeur relative.

3ème PARTIE

Comparaison entre les résultats du calcul et des essais

INTRODUCTION

La 3ème partie de ce travail est consacrée à la confrontation entre les résultats de mesures, faites lors d'essais sur des alternateurs dont le rotor comporte du fer massif, et les calculs déduits de la théorie développée lors des 1ère et 2ème parties. On cherchera, dans la mesure du possible, à interpréter les écarts entre résultats de mesures et de calculs.

Trois sortes d'essais seront analysés : les essais correspondants ont été effectués sur des turboalternateurs de puissance élevée (supérieure à 100 MVA) permettant, effectivement, un relevé des différentes grandeurs en fonction de la fréquence. Ces essais sont les suivants :

1 - Essais avec présence d'une composante inverse permanente de courant. Les conditions des essais sont telles que l'influence de la saturation se fait peu sentir. La méthode théorique associée est donc celle de la 1ère partie (notamment chapitre 5). Lorsque c'est nécessaire, la prise en compte de la saturation peut se faire de façon assez simple. Le glissement g est égal à 2.

2 - Essais lors de petites oscillations autour d'un régime permanent synchrone. La méthode est donc typiquement celle de la 1ère partie, avec exploration d'une gamme relativement importante de glissements.

3 - Essais de marche asynchrone. Ces marches asynchrones sont effectuées avec les alternateurs connectés au réseau : la saturation est importante. La méthode est celle de la 2ème partie (notamment chapitre 2). Les glissements sont généralement compris entre 10^{-4} et 10^{-2}.

Chapitre 1

PERTES EN REGIME INVERSE DES TURBOALTERNATEURS

1.1 - METHODE EXPERIMENTALE.

Nous n'insisterons pas sur cette méthode classique.

L'alternateur est entraîné à sa vitesse nominale par un moteur taré ; on établit un court-circuit entre deux phases de l'alternateur, puis on excite ce dernier. Si I est le courant de court-circuit, la composante inverse I_2 vaut :

$$I_2 = I/\sqrt{3}$$

d'où I_2 et $i_2 = I_2/I_n$ intervenant au chapitre 5.

Les pertes dissipées dans le moteur s'obtiennent à partir de la puissance fournie sur l'arbre par le moteur taré, en retranchant les diverses pertes mécaniques et les pertes Joule stator.

Nous possédons les résultats expérimentaux relatifs à quatre alternateurs, et comme ils présentent des différences technologiques les uns par rapport aux autres, nous présentons les résultats séparément. Ces essais permettent en outre de justifier expérimentalement le choix qui a été retenu en définitive, relativement à la prise en compte du raccordement entre la région 4 et les régions 5 et 1 (voir discussion § 3.2.3.3. de la 1ère partie)

1.2 - RESULTATS OBTENUS AVEC LES DIFFERENTS TURBOALTERNATEURS.

1.2.1 - Turboalternateur n° 1.

Ses caractéristiques principales sont :

- Puissance nominale apparente S_n = 294 MVA
- Vitesse nominale 3000 t/mn, soit $p = 1$ et $\omega_0 = 314$ rad/s.

Cette machine se caractérise par le fait que la zone bobinée et la zone polaire comportent des amortisseurs et des cales en laiton, donc assez bonnes conductrices. Dans une même encoche, les cales sont constituées d'éléments de 20 à 30 cm de longueur mises bout à bout. Le courant ne peut donc passer directement d'une cale à l'autre et, de ce fait, la résistivité effective des cales doit être majorée. Ainsi qu'il a été expliqué en 1ère partie, la détermination, soit théorique, soit expérimentale, du coefficient majorateur n'est pas encore réalisée à notre connaissance, et force nous est de la laisser en suspens. Le présent travail ne peut donc constituer qu'une contribution indirecte à son évaluation.

Les essais ont été effectués pour les valeurs de i_2 0,0547 - 0,098 - 0,153 et 0,202 . Mais les pertes, aussi bien calculées que mesurées, sont rigoureusement proportionnelles à $(i_2)^2$; en effet, du fait de la bonne conductivité des cales, l'influence de la saturation du fer est tout à fait négligeable. Il est donc tout à fait suffisant de présenter les résultats relatifs à une seule valeur de i_2 ; on a choisi $i_2 = 0,153$. Les résultats sont portés dans le tableau I. Les pertes totales au rotor, déduites des mesures, sont de 219 kW, valeur qui doit être comparée à la ligne "Pertes totales" du tableau I.

On peut tirer de ce tableau les conclusions suivantes :

- Les pertes dans les cales sont nettement prépondérantes.

- Il n'y a pas de différence notable entre le modèle A et le modèle B. On a davantage détaillé les calculs avec modèle B parce que leur mise en oeuvre est plus simple.

- Le coefficient de majoration de résistivité des cales joue un rôle notable, et son choix a posteriori pourrait conduire à une exacte coïncidence des résultats de calcul et de mesure. Bien que la question de ce choix reste pratiquement ouverte, nous préférons nous en tenir, pour le moment, à une valeur relativement modeste, à savoir 1.6, pour quatre raisons, dont aucune n'est certes convaincante :

  a) une valeur élevée de ce coefficient signifierait qu'une grande proportion des pertes est dissipée au voisinage des extrémités de cales, à leur contact avec le fer et les amortisseurs. Or, il n'a pas été décelé de trace d'échauffements notables en ces points ;

  b) une valeur voisine de 1,6 nous a été indiquée oralement comme raisonnable par certains constructeurs ;

  c) la valeur de 1,6 conduit à des valeurs de pertes calculées inférieures aux valeurs mesurées ; mais des écarts de même sens ont été constatés aussi bien pour des machines où l'influence de ce coefficient était, soit nulle, soit beaucoup moins marquée, ainsi qu'on le verra plus loin ;

  d) enfin, la valeur de 1,6 ne semble pas trop faible, dans le cas de la prédétermination des régimes asynchrones (chapitre 3).

TABLEAU I

PERTES ROTOR (EN KW) DE LA MACHINE 1, POUR UN TAUX DE COURANT INVERSE i_2 = 0,153, RESULTANT DU CALCUL

	MODELE B (non prise en compte de la région 4)			MODELE A (prise en compte de la région 4)
Coefficient de majoration de résistivité des cales	1,3	1,6	2	1,6
Pertes dans la zone bobinée Par région :				
a1 (cales)	88,1	96,6	105,7	90,3
a2 (amortisseurs)	1,98	3,15	4,9	2,9
a4 (fer)	0	0	0	3,55
a5 (fer)	1,04	1,41	1,93	1,44
a6 (fer)	0,004	0,007	0,01	0,007
a7 (fer)	0,04	0,067	0,105	0,065
b8 (fer)	0,002	0,003	0,004	0,002
Total zone bobinée	91,15	101,2	112,7	98,6
Pertes dans la zone polaire Par région				
c1 (cales)	42,04	46,28	50,93	42,97
c2 (amortisseurs)	0,58	0,905	1,4	0,85
c4 (fer)	0	0	0	1,68
c5 (fer)	0,38	0,51	0,706	0,52
c6 (fer)	0,001	0,002	0,003	0,002
d8 (fer)	0,94	1,51	2,416	1,3
Total zone polaire	43,93	49,21	55,46	47,32
Pertes dans les extrémités	21,15	21,11	21,03	20,68
Pertes totales	156,2	171,52	189,2	166,6

Si on s'en tient à ce coefficient de 1,6, le rapport des pertes calculées aux pertes mesurées s'établit à 0,78 (il aurait été de 0,865 avec un coefficient égal à 2). Nous reportons la discussion de ce résultat à la fin du présent chapitre.

1.2.2 - Machine n° 2.

Ses caractéristiques principales sont :

- Puissance nominale apparente S_n = 1080 MVA

- Vitesse nominale 1500 t/mn, soit $p = 2$ et $\omega_0 = 314$ rad/sec.

Cette machine est, du point de vue de la structure des cales et amortisseurs, tout à fait semblable à la machine n° 1. Elle s'en distingue simplement par sa puissance nominale supérieure et par le fait qu'elle est quadripolaire.

Les cales sont constituées du même matériau et disposées de façon semblable.

Les essais ont été effectués pour les valeurs de i_2 0,10 - 0,125 - 0,15 - 0,17. Les pertes, ici encore, sont rigoureusement proportionnelles à $(i_2)^2$ donc dans le tableau II on présente seulement les résultats relatifs à $i_2 = 0{,}15$. Les pertes totales au rotor, déduites des mesures, sont de 1 260 kW, valeur qui doit être comparée à la ligne "pertes totales" du tableau II. On n'a retenu que la valeur 1,6 du coefficient de majoration de résistivité des cales.

Les conclusions, à l'observation du tableau, sont les mêmes que pour la machine 1 : prépondérance des pertes dans les cales, équivalence pratique des modèles A et B. Le rapport des pertes calculées aux pertes mesurées est 943/1260 = 0,75, donc du même ordre de grandeur que dans le cas précédent, ce qui est cohérent, puisque les technologies sont semblables et les hypothèses de calcul identiques.

1.2.3 - Machine n° 3.

Ses caractéristiques principales sont :

- Puissance apparente nominale S_n = 294 MVA

- Vitesse nominale 3000 t/mn, soit $p = 1$ et $\omega_0 = 314$ rad/sec.

Cette machine, de caractéristiques nominales semblables à la machine n° 1, s'en distingue technologiquement par le fait que la zone bobinée comporte des amortisseurs en cuivre et des cales en acier amagnétique, donc de résistivité très élevée (de l'ordre de 75.10^{-8} ohms m. à 20° C), alors que la zone polaire comporte des amortisseurs en cuivre et des cales en acier magnétique, ce que nous avons convenu (voir 1ère Partie, Annexe D, § D3)

TABLEAU II

PERTES ROTOR (EN KW) DE LA MACHINE 2, POUR UN TAUX DE COURANT INVERSE $i_2 = 0,15$, RESULTANT DU CALCUL

	MODELE B (non prise en compte région 4)	MODELE A (prise en compte de la région 4)
Pertes dans la zone bobinée Par région		
a1 (cales)	422	405
a2 (amortisseurs)	29,2	28
a4 (fer)	0	10,2
a5 (fer)	5	5,5
a6 (fer)	0,045	0,05
a7 (fer)	0,28	0,28
b8 (fer)	0,014	0.01
Total zone bobinée	456	450
Pertes dans la zone polaire Par région		
c1 (cales)	422	368
c2 (amortisseurs)	25,3	22,4
c4 (fer)	0	28,5
c5 (fer)	4,1	4,6
c6 (fer)	0,032	0,036
d8 (fer)	14,7	10,3
Total zone polaire	466	433
Pertes dans les extrémités	21,3	21
Pertes totales	943	904

d'assimiler au cas de surfaces polaires complètement lisses, mais communiquant cependant avec les extrémités grâce aux amortisseurs. Il y a lieu donc d'escompter des pertes plus élevées que dans le cas de la machine 1.

Les essais ont été effectués pour les valeurs de i_2 0,05, 0,10, 0,148 et 0,1832.

Nous allons d'abord examiner, dans le détail, le cas $i_2 = 0{,}148$, pour lequel les pertes totales au rotor, déduites des mesures, sont de 405 kW, valeur qui doit être comparée à la ligne "pertes totales" du tableau III.

A l'examen du tableau III, il apparaît que l'incidence des différentes variantes de calcul se fait moins sentir que dans le cas de la machine 1 par exemple, à cause de la prépondérance des pertes dans la zone polaire, qui sont bien définies.

On remarque qu'en augmentant la résistivité des cales, les pertes diminuent (contrairement au cas de la machine 1). Cela vient de ce que les amortisseurs sont ici beaucoup moins écrantés : lorsque la résistivité des cales augmente, la profondeur de pénétration dans celles-ci augmente aussi, donc les amortisseurs reçoivent plus de courant, ce qui est favorable au bilan des pertes, vu la faible résistivité des amortisseurs.

On constate que le bilan des pertes est pratiquement identique avec le modèle A ou B (bien que la distribution des pertes dans les différents matériaux ne soit pas tout à fait la même).

Du fait qu'il n'est pas vraisemblable d'imaginer, pour des machines puissantes, des cales encore plus résistives, nous considérons que le problème de la prise en compte des extrémités de dents est définitivement résolu puisque même dans le cas où on pourrait attendre des différences les plus sensibles entre les deux modèles (glissement égal à 2 et cales particulièrement résistives), les deux modèles correspondant pourtant à des hypothèses très différentes conduisent à des résultats globaux voisins ; on conservera donc seulement le modèle A, ainsi qu'il est expliqué au § 3.2.3.3. de la 1ère partie, parce qu'il se justifie mieux théoriquement et qu'en conséquence les informations qu'il donne sur les pertes locales sont plus crédibles.

Reste à choisir le coefficient de majoration de résistivité des cales. On peut estimer qu'une valeur plus faible que dans le cas de la machine 1 est plausible (une cale très résistante voit normalement sa résistance moins majorée par un contact imparfait) et qu'on peut donc adopter le coefficient 1,3, d'où les pertes calculées 355,4, dans le rapport 0,88 avec les pertes mesurées (ce rapport serait 0,86 avec un coefficient de majoration de résistivité des cales de 1,6).

Il nous reste à étudier l'influence de la saturation. Elle peut être examinée sur le tableau III bis. On y a porté les résultats de calcul et de mesures pour les différentes valeurs de i_2. On voit que le quotient des pertes par i_2^2 diminue quand i_2 croît, or ce quotient serait rigoureusement constant si la saturation n'intervenait pas. Le fait que le quotient des pertes calculées aux pertes mesurées reste cependant indépendant de i_2 (à part le premier point, pour lequel la précision de mesure est sûrement moins bonne), montre que la saturation semble être correctement prise en compte par le calcul.

TABLEAU III

PERTES ROTOR (EN KW) DE LA MACHINE 3, POUR UN TAUX DE COURANT INVERSE $i_2 = 0{,}148$, RESULTANT DU CALCUL

	MODELE B (non prise en compte de la région 4)		MODELE A (prise en compte de la région 4)
Coefficient de majoration de résistivité des cales	1,3	1,6	1,3
Pertes dans la zone bobinée			
Par région			
a1 (cales)	60,4	52,0	52,8
a2 (amortisseurs)	26,1	27,9	22,6
a4 (fer)	0	0	11,5
a5 (fer)	8,2	8,7	9,1
a6 (fer)	0,05	0,05	0,05
a7 (fer)	0,47	0,50	0,45
b8 (fer)	0,02	0,02	0,01
Total zone bobinée	95,2	89,2	96,5
Pertes zone polaire	245,7	245,7	245,7
Pertes dans les extrémités	14,5	14,2	14,6
Pertes totales	355,4	349,1	356,8

TABLEAU III bis

PERTES ROTOR (EN KW) DE LA MACHINE 3, EN FONCTION DE i_2. MISE EN EVIDENCE DE L'INFLUENCE DE LA SATURATION

i_2	0,05	0,10	0.148	0,183
Pertes calculées	50,7	174,2	355,4	528,1
$\frac{\text{Pertes calculées}}{(i_2)^2}$	20.000	17.200	16.200	15.700
Pertes mesurées	65	200	405	620
$\frac{\text{Pertes mesurées}}{(i_2)^2}$	25.800	19.800	18.500	18.500
$\frac{\text{Pertes calculées}}{\text{Pertes mesurées}}$	0,78	0.87	0.88	0.85

1.2.4 - Machine n° 4.

Ses caractéristiques principales sont :

- Puissance apparente nominale S_n = 183 MVA

- Vitesse nominale 3000 t/mn soit $p = 1$ et $\omega_o = 314$ rad/sec.

Cette machine se distingue technologiquement par le fait que la zone bobinée comporte des cales (en tronçons de 20 cm. environ), mais pas d'amortisseur, et que la zone polaire ne comporte ni cale, ni amortisseurs ; en conséquence, les rainures transversales d'équilibrage ne sont pas shuntées et on se trouve dans le cas du § D.3.2. (1ère partie Annexe D).

Les résultats de calcul et de mesure sont reportés sur le tableau IV, pour 3 valeurs de i_2.

Les hypothèses prises pour la zone bobinée sont l'hypothèse A (prise en compte de la régione 4) et un coefficient de majoration de résistivité des cales égal à 1 (pas de majoration). Ces hypothèses ne correspondent pas aux conclusions des précédents paragraphes : elles correspondent, en effet, à des calculs anciens ; mais du fait de la faible influence relative de la zone bobinée dans le cas présent, il n'a pas paru utile de refaire les calculs, ce qui aurait conduit à des modifications numériques négligeables.

L'examen du tableau IV appelle les remarques suivantes :

- Les pertes dans la zone polaire sont tout à fait prépondérantes,

- Le résultat total est inférieur aux pertes mesurées, dans un rapport de l'ordre de 0,85. L'influence des rainures dans le bilan des pertes est importante ; les pertes dans les rainures représentent environ 13 % des pertes totales calculées.

- L'influence de la saturation est plus marquée dans le calcul que lors des essais. Pourtant, le résultat du calcul à cet égard semble raisonnable, compte tenu, justement, de l'influence prépondérante de la zone polaire.

1.3 - CONCLUSION D'ENSEMBLE DU CHAPITRE 1 (PERTES EN REGIME INVERSE).

Outre les conclusions partielles énoncées à l'occasion de telle ou telle machine, on peut faire la remarque générale suivante :

Le calcul, mené de façon systématique et non guidé par les résultats, donne une approche satisfaisante des pertes en régime inverse ; la vérification a été faite pour des technologies assez variées. L'influence des différents matériaux et de la saturation est bien prise en compte.

Cependant, on observe une erreur systématique de 15 à 20 % par défaut, qui ne peut être entièrement attribuée au problème resté ouvert du coefficient de majoration de résistivité des cales.

TABLEAU IV

PERTES ROTOR (EN KW) DE LA MACHINE 4, EN FONCTION DE i_2

DETAIL DES CALCUL ET RESULTATS DE MESURE

i_2	0,078	0,1219	0,1577
Pertes calculées			
Pertes dans la zone bobinée			
Par région			
a1 (cales)	6,35	15,52	25,98
a4 (fer)	0,1	0.25	0,41
a5 (fer)	0,016	0,04	0.066
a6 (fer)	0	0	0
a7 (fer)	0	0	0
b8 (fer)	0	0	0
Total zone bobinée	6,47	15,81	26,46
Pertes zone polaire	60,13	124,4	188,5
Pertes dans les extrémités	1,47	3,57	5,94
Pertes calculées totales	68,07	143,78	220,9
$\frac{\text{Pertes calculées}}{i_2^2}$	11.200	9.700	8.900
Pertes mesurées	76,1	171,4	281
$\frac{\text{Pertes mesurées}}{i_2^2}$	12.500	11.600	11.300
$\frac{\text{Pertes calculées}}{\text{Pertes mesurées}}$	0,884	0,84	0.785

Quelques hypothèses peuvent être émises pour expliquer ce déficit, ouvrant la voie à d'éventuelles recherches.

- Des pertes supplémentaires peuvent se produire lors du transport du courant depuis le corps du rotor vers les frettes, par l'intermédiaire des amortisseurs ; en effet, on a souvent constaté des échauffements élevés dans ces régions lors des essais ; en outre, on a supposé pour le calcul un contact parfait, de résistance nulle (grâce à la force centrifuge) entre les amortisseurs et les frettes ; cette hypothèse est peut-être optimiste.

- Pour évaluer les pertes mesurées, on déduit des pertes totales les pertes mécaniques et les pertes Joule du stator ; ces dernières sont normalement majorées pour tenir compte des pertes supplémentaires. Il est possible que ces pertes supplémentaires au stator soient sous évaluées, ce qui conduirait à attribuer une valeur excessive aux pertes rotor mesurées. Il n'est pas impossible qu'une différence de l'ordre de 10 % puisse provenir de ce fait.

Enfin, il faut dire quelques mots de l'usage qui peut être fait de cette méthode, dont les développements possibles ne sont pas détaillés ici.

Cette méthode permet, en effet, de prévoir les échauffements globaux et locaux des turboalternateurs soumis à des contraintes de courant inverse permanent ou transitoire ; elle permet de juger de l'influence sur ces contraintes, d'une part, des différentes technologies et des différents matériaux qui peuvent être utilisés pour constituer les cales et les amortisseurs, d'autre part de l'accroissement des puissances unitaires et, par conséquent, elle est susceptible de contribuer à l'adaptation la plus économique et la plus efficace des techniques constructives aux contraintes que le matériel peut être amené à subir en exploitation, du fait des composantes inverses de courant permanentes et transitoires.

Chapitre 2

REPONSE EN FREQUENCE DES TURBOALTERNATEURS LORS DE PETITES PERTURBATIONS

2.1 - PRINCIPE DE LA METHODE EXPERIMENTALE.

Rappelons les équations (1)et (2) de la lère partie, caractérisant le fonctionnement d'un alternateur en régime variable, et supposant qu'il n'y ait pas de composante homopolaire :

(100)
$$\begin{cases} v_d = -p\Psi_d - \omega'\Psi_q - r_s i_d \\ v_q = -p\Psi_q + \omega'\Psi_d - r_s i_q \\ \Psi_d = l_d(p)\, i_d + g_d(p)\, v_f \\ \Psi_q = l_q(p)\, i_q \end{cases}$$

Lorsque l'alternateur fonctionne en régime permanent synchrone, les quantités v_d , v_q , Ψ_d , Ψ_q , i_d , i_q et v_f sont des constantes en fonction du temps (et $\omega' = \omega_o$).

Supposons qu'on impose à ces grandeurs une variation sinusoïdale de faible amplitude et de pulsation $g\,\omega_o$. La faible amplitude permet de linéariser le système, en transformant le système (100) en relations linéaires entre les variations des diverses grandeurs.

Si ces variations sont sinusoïdales, on peut leur associer des nombres complexes Δv_d Δv_q etc .... à condition de remplacer l'opérateur p par $j\omega g$. Le système (100) devient alors :

(101)
$$\begin{cases} \Delta v_d = -j\omega_o g\, \Delta\Psi_d - \omega_o \Delta\Psi_q - \Psi_{qo}\Delta\omega' - r_s \Delta i_d \\ \Delta v_q = -j\omega_o g\, \Delta\Psi_q + \omega_o \Delta\Psi_d + \Psi_{do}\Delta\omega' - r_s \Delta i_q \\ \Delta\Psi_d = l_d(j\omega_o g)\, \Delta i_d + g_d(j\omega_o g)\, \Delta v_f \\ \Delta\Psi_q = l_q(j\omega_o g)\, \Delta i_q \end{cases}$$

Les ordres de grandeur mis en jeu permettent la plupart du temps de négliger les termes de chute ohmique (proportionnels à r_s).

De toutes façons, qu'on les néglige ou non, il est visible d'après les équations (101) qu'il suffit de mesurer, en amplitude et en phase, les 6 grandeurs Δv_d, Δv_q, Δi_d, Δi_q, Δv_f et $\Delta\omega'$, pour une valeur donnée de g, pour en déduire les nombres complexes $\ell_d(j\omega_o g)$, $g_d(j\omega_o g)$, $\ell_q(j\omega_o g)$ pour cette valeur de g (*). Toujours d'après (101) la connaissance de ψ_{do} et ψ_{qo} est également nécessaire ; ces valeurs sont obtenues facilement par l'analyse du régime préexistant à la perturbation. L'ensemble des valeurs de ℓ_d, g_d, ℓ_q, en fonction de g, constitue les "transmittances harmoniques" relatives aux petites perturbations. Leur connaissance est d'un intérêt capital pour l'étude des problèmes de réglage, notamment de tension, en association avec la stabilité de fonctionnement de l'alternateur raccordé au réseau.

La méthode expérimentale effectivement utilisée, est exposée dans la référence [14] dont la référence [16] constitue la traduction en français avec quelques compléments.

Nous ne décrivons pas, ici, cette méthode qui sort du cadre de cet exposé.

Notons simplement que les "transmittances harmoniques" $\ell_d(j\omega_o g)$, $\ell_q(j\omega_o g)$, $g_d(j\omega_o g)$ sont communément remplacées par les grandeurs suivantes qui leur sont liées de façon simple :

L'impédance harmonique d'axe direct :

$$z_d(j\omega_o g) = j\omega_o \ell_d(j\omega_o g)$$

L'admittance harmonique d'axe direct :

$$y_d(j\omega_o g) = 1/z_d(j\omega_o g)$$

L'impédance harmonique d'axe en quadrature :

$$z_q(j\omega_o g) = j\omega_o \ell_q(j\omega_o g)$$

L'admittance harmonique d'axe en quadrature :

$$y_q(j\omega_o g) = 1/z_q(j\omega_o g)$$

La fonction harmonique d'excitation :

$$f_d(j\omega_o g) = \frac{r_{fd}}{x_{md}} j\omega_o g_d(j\omega_o g)$$

Pour cette dernière, le coefficient multiplicateur a été choisi de façon que $f_d(j\omega_o g)$ tende vers j lorsque g tend vers o.

(*) On obtient directement la fonction $g_d(j\omega_o g)$ en opérant à vide (induit déconnecté).

Ces différentes fonctions peuvent donc être :

- soit mesurées par le procédé indiqué plus haut,

- soit directement calculées par la méthode de la 1ère partie, puisque les 3ème et 4ème équations du système (101) ci-dessus traduisent exactement le comportement des schémas équivalents des fig. 9a et 9 b.

La suite de ce chapitre est consacrée à la comparaison des résultats du calcul et de l'expérience effectués sur deux turboalternateurs de technologies assez différentes.

2.2 - RESULTATS OBTENUS AVEC DEUX TURBOALTERNATEURS.

2.2.1.- Turboalternateur n° 5.

Ses caractéristiques principales sont :

- Puissance nominale apparente $S_n = 667$ MVA

- Vitesse nominale 3000 t/mn, soit $p = 1$ et $\omega_0 = 314$ rad/sec.

La technologie de cette machine est très voisine de celle des machines n° 1 et 2 (notamment cales bonnes conductrices dans la zone polaire et dans la zone bobinée).

Lors des essais qui ont eu lieu en 1972, la méthode expérimentale n'était pas encore tout à fait au point, si bien que toutes les informations souhaitées n'avaient pu être obtenues, notamment on n'avait pu mesurer que $f_d(j\omega_0 g)$ et $z_q(j\omega_0 g)$, et non pas $z_d(j\omega_0 g)$.

Les fig. 25 et 26 montrent la comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux. Ces derniers concernent une plage de fréquence relativement étroite, et les résultats du calcul sont donnés seulement dans cette plage, bien que le calcul permette l'exploration de toutes les valeurs de g comprises entre 0 et 2.

La fig. 25 est relative à $f_d(j\omega_0 g)$, module et argument en fonction de g.

La fig. 26 est relative à $z_q(j\omega_0 g)$, module et argument en fonction de g.

La concordance est satisfaisante.

Les résultats ont déjà été présentés en Bibliographie [14] et [16].

2.2.2 - Turboalternateur n° 6.

Ses caractéristiques principales sont :

- Puissance nominale apparente $S_n = 294$ MVA

- Vitesse nominale 3000 t/mn, soit $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ et $\omega_0 = 314$ rad/sec.

La technologie de cette machine est identique à celle de la machine n° 3, notamment cales de résistivité élevée dans la zone bobinée et en acier magnétique dans la zone polaire.

La comparaison est faite sur les mêmes bases que pour la machine précédente.

Les résultats sont présentés fig. 27 pour $\mathfrak{Z}_d(j\omega_0 g)$, $\mathfrak{f}_d(j\omega_0 g)$, $\mathfrak{Z}_q(j\omega_0 g)$, module et argument en fonction de g.

Les résultats de la comparaison sont un peu moins satisfaisants que dans le cas de la machine n° 5, sauf en ce qui concerne la fonction $\mathfrak{f}_d(j\omega_0 g$

2.3 - CONCLUSION D'ENSEMBLE DU CHAPITRE 2 .

L'écart entre les résultats théoriques et expérimentaux est, à notre avis, acceptable. En effet, l'estimation statistique ne donne pas une précision absolue, comme on peut le voir en observant l'allure des courbes expérimentales et la largeur des plages traduisant l'incertitude statistique Par ailleurs, la prédétermination théorique est basée sur un modèle simplifié, donc non rigoureux, et de plus dont certains paramètres ont dû être choisis arbitrairement, notamment le coefficient de majoration de la résistivité des cales dû à leur non jointivité. Il faut souligner qu'aucun de ces choix n'a été influencé par le désir de mieux faire coïncider théorie et expérience ; par contre, il n'est pas exclu d'effectuer ces réajustements dans une deuxième étape.

Il faut cependant préciser que le choix d'un paramètre particulier a été, ici, guidé par les essais : il s'agit de la réactance de magnétisation, x_{md} et x_{mq} sur les schémas équivalents des fig. 9a et 9b. Pour un régime de fonctionnement déterminé, on peut distinguer trois valeurs de ce paramètre : la valeur non saturée, correspondant à la partie rectiligne de la caractéristique à vide, la valeur saturée, correspondant à la droite joignant l'origine au point de fonctionnement sur la même caractéristique, et enfin la valeur "différentielle", correspondant à la tangente à cette caractéristique au point de fonctionnement. Il est extrêmement hasardeux de chercher à fonder théoriquement le choix de la valeur à adopter lors de régimes tels que ceux du présent chapitre. Les résultats expérimentaux ont conduit à préférer la deuxième solution, à savoir le choix pour x_{md} et x_{mq} de la "valeur saturée" correspondant au point de fonctionnement considéré.

Chapitre 3

FONCTIONNEMENT ASYNCHRONE DES TURBOALTERNATEURS

3.1 - INTERET DE LA CONNAISSANCE DE CE FONCTIONNEMENT.

Un alternateur couplé au réseau peut perdre le synchronisme par suite de divers incidents. Le couple synchrone disparaît et l'alternateur part à l'emballement. La survitesse est limitée, et le retour au synchronisme facilité, principalement par l'intervention du régulateur de vitesse, mais aussi grâce à l'influence du couple asynchrone qui exerce un effet ralentisseur en régime hypersynchrone.

La perte de synchronisme peut provenir d'une surcharge ou d'une avarie sur le réseau de transport. Dans ce cas, l'enroulement d'excitation reste fermé sur la source d'excitation et les schémas équivalents sont ceux des fig. 9a et 9b. La tension v_f doit être considérée comme nulle, puisque la source d'excitation se comporte comme une impédance pratiquement nulle à toute fréquence non nulle.

La perte de synchronisme peut aussi provenir de l'ouverture du circuit d'excitation. L'ouverture peut être totale ou bien l'inducteur peut se trouver alors fermé sur une résistance extérieure dite "résistance de décharge" destinée à le protéger contre les surtensions. Dans le 1er cas, la branche inducteur de la fig. 9a doit être ouverte, dans le 2ème cas, elle doit être maintenue fermée, mais avec v_f nulle et r_f augmentée dans un rapport convenable.

La connaissance du comportement des alternateurs en régime asynchrone est donc très souhaitable pour les deux raisons principales suivantes :

- connaissance des conditions de retour au synchronisme après une perturbation,

- connaissance des surtensions pouvant affecter le circuit inducteur lors d'une marche hors synchronisme.

3.2 - MODALITES EXPERIMENTALES.

Les essais en marche asynchrone sont effectués lorsque l'alternateur est connecté au réseau. Le couple moteur étant nul (admission nulle à la turbine), on adopte pour le circuit inducteur l'une des trois configurations :

- inducteur ouvert,
- inducteur fermé sur la résistance de décharge,
- inducteur en court-circuit (normalement sur l'excitatrice, cette dernière délivrant une tension nulle).

Puis on augmente la puissance active et à chaque palier de puissance, on mesure les différentes grandeurs électriques, ainsi que le glissement.

3.3 - RESULTATS OBTENUS AVEC DIFFERENTES MACHINES.

3.3.1 - Caractéristiques des machines essayées.

Les trois turboalternateurs qui ont subi des essais de marche asynchrone, et pour lesquels il a été possible d'effectuer le calcul complet, ont pour caractéristiques principales :

a) Turboalternateur n° 7.

- Puissance nominale apparente $S_n = 156,25$ MVA
- Facteur de puissance nominal $\cos \varphi_n = 0,8$
- Tension nominale $U_n = 15,5$ KV
- Courant nominal $I_n = 5800$ A
- Tension d'excitation nominale en charge $V_{fn} = 250$ V
- Courant d'excitation nominal en charge $I_{fn} = 1070$ A
- Vitesse nominale 3 000 t/mn, soit $p = 1$ et $\omega_0 = 314$ rad./s

Cette machine est de technologie analogue aux machines n° 1, 2, 5, à savoir : amortisseurs en cuivre et cales bonnes conductrices en zone bobinée et en zone polaire.

b) Turboalternateur n° 8.

- Puissance nominale apparente $S_n = 156,25$ MVA
- Facteur de puissance nominal $\cos \varphi_n = 0,8$
- Tension nominale $U_n = 15,5$ KV
- Courant nominal $I_n = 5800$ A
- Tension d'excitation nominale en charge $V_{fn} = 295$ V
- Courant d'excitation nominal en charge $I_{fn} = 1200$ A
- Vitesse nominale 3 000 t/mn, soit $p = 1$ et $\omega_0 = 314$ rad./s

Cette machine est de technologie analogue à la machine n° 3, à savoir : amortisseur en cuivre et cales en acier amagnétique en zone bobinée, amortisseurs en cuivre et cales en acier magnétique en zone polaire.

c) Turboalternateur n° 9.

- Puissance nominale apparente $S_n = 294$ MVA
- Facteur de puissance nominal $\cos \varphi_n = 0,85$
- Tension nominale $U_n = 20$ KV
- Courant nominal $I_n = 8500$ A
- Tension d'excitation nominale en charge $V_{fn} = 397$ V
- Courant d'excitation nominal en charge $I_{fn} = 1\,930$ A
- Vitesse nominale 3 000 t/mn soit $p = 1$ et $\omega_0 = 314$ rad/s.

Cette machine est pratiquement identique à la machine n° 2.

3.3.2 - Conditions d'essais et présentation des résultats.

Sur les machines 7 et 8, les essais en marche asynchrone ont été effectués à inducteur ouvert et à inducteur en court-circuit.

Sur la machine 9, ils ont, en outre, été effectués à inducteur fermé sur la résistance de décharge, laquelle représentait environ 2 fois et demi la résistance de l'inducteur.

Les résultats de l'ensemble des essais et leur comparaison avec les mesures sont reportés aux tableaux VII, VIII et IX (on a affecté aux tableaux les mêmes numéros qu'aux machines).

Pour l'interprétation des tableaux, une remarque préliminaire s'impose : le couple asynchrone d'une machine synchrone à un glissement g est la superposition d'un couple moyen et d'un couple pulsatoire à la pulsation $2\omega_o g$ (voir Bibl. [17]). L'amplitude de ce couple pulsatoire est d'autant plus grande que l'anisotropie électromagnétique, c'est-à-dire la différence entre $\underline{z}_d(j\omega_o g)$ et $\underline{z}_q(j\omega_o g)$, est plus marquée. Elle sera donc particulièrement notable lors des essais à inducteur fermé. En outre, comme les essais ont lieu à faible glissement, l'existence du couple pulsatoire se répercute notablement sur la vitesse.

En conséquence : lors des essais à inducteur ouvert ou fermé sur résistance de décharge, l'hypothèse de glissement constant qui est à la base de tous nos calculs est approximativement respectée. Par contre, à inducteur en court-circuit sur lui-même, le glissement, pour une puissance donnée, varie fortement, et toutes les grandeurs électriques fluctuent avec une période égale à $\frac{2\pi}{2\omega_o g}$. C'est pourquoi, dans cette dernière catégorie d'essais, on a été amené à reporter les valeurs extrêmes (maximale et minimale) de certaines grandeurs relevées, les autres devant être considérées comme des valeurs moyennes lors des fluctuations. Pour cette raison, les calculs théoriques en hypothèse de glissement constant ne peuvent donner qu'une image approchée de la réalité, lorsque l'inducteur est en court-circuit.

Il est à noter aussi que lors de ces essais, le courant inducteur I_{fd} subit une variation au cours du temps qui n'est pas du tout sinusoïdale, mais s'apparente plutôt à une courbe en créneaux (voir à ce sujet la Bibl. [21]). Pour comparer cette loi à la valeur efficace calculée, on a été amené à multiplier l'amplitude de ces créneaux par $\frac{4}{\pi\sqrt{2}}$ (passage au fondamental, puis à la valeur efficace du fondamental).

Remarquons enfin que les grandeurs les plus utiles à connaître en pratique sont :

- la puissance active en fonction du glissement (rappelons que la puissance active représente très sensiblement le couple électromagnétique, au coefficient $\frac{1}{\omega_o}$ près) ;
- le courant stator en fonction du glissement (en vue d'évaluer les surintensités qui pourraient être dangereuses) ;
- la tension aux bornes de l'inducteur lorsqu'il est à circuit ouvert.

En ce qui concerne des hypothèses de calcul, on a adopté, pour toutes les machines, un coefficient de majoration de résistivité de cales de 1,6.

3.4 - CONCLUSIONS RELATIVES AU CHAPITRE 3 (MARCHE ASYNCHRONE).

Pour la plupart des résultats, l'écart entre valeurs calculées et mesurées n'excède pas 10 %, ce qui est satisfaisant.

TABLEAU VII

FONCTIONNEMENT ASYNCHRONE DE LA MACHINE 7

1. INDUCTEUR OUVERT

g (%)		0,063	0,110	0,130	0,180
U (kV)		13,5	13,5	13,5	13,2
I (kA)	mes.	3,7	4,23	4.7	5,34
	calc.	3,33	4,2	4,6	5,44
P (MW)	mes.	43	53	63	73
	calc.	32,8	54,4	62 6	77,4
Q (MVAR)	mes.	75,5	84	90	97
	calc.	70 7	81,8	87.3	97,2
V_{fd} (Volts eff)	mes.	63	115	132	184
	calc.	76,4	130,8	153	201,6

2. INDUCTEUR EN COURT- CIRCUIT

g (%)		0,038	0,084	0,110
U (kV)		13,0	12,25	11,5
I (kA)	mes.	6,48 - 3,55	9,2 - 4,95	12,2 - 6
	calc.	3,56	5,34	6,0
P (MW)	mes.	63	96	111
	calc.	43,9	75,5	79,1
Q (MVAR)	mes.	130 - 59	162 - 69	176 - 60
	calc.	67,3	84,4	88,7
I_{fd} (Amp. eff)	mes.	270	473	568
	calc.	252	481,5	555

TABLEAU VIII

FONCTIONNEMENT ASYNCHRONE DE LA MACHINE 8

1. INDUCTEUR OUVERT

g (%)		0,055	0,113	0,168	0,253	0,333
U (kV)		14,4	14,1	13,95	13,3	13,3
I (kA)	mes.	3.14	4,22	5,20	6,62	7,5
	calc.	3,30	4,22	5,20	6,50	7,84
P (MW)	mes.	37.5	61.5	82,5	105	117
	calc.	30,7	57.8	80,0	102	124
Q (MVAR)	mes.	73,2	82.5	95,5	112.5	128,5
	calc.	76,4	85,4	96,9	110	132
V_{fd} (Volt eff.)	mes.	64.3	120	173	238	296
	calc.	64,0	126	182	253	321

2. INDUCTEUR EN COURT-CIRCUIT

g (%)		0.033	0,064	0.122	0,215
U (kV)		15.05	13,95	13.2	12,7
I (kA)	mes.	4 - 2.68	5,5 - 3,5	8,2 - 5	10.6 - 6,3
	calc.	3.61	4.57	6,62	9,29
P (MW)	mes.	42,5	74.3	104	131
	calc.	44 2	70,4	106	135
Q (MVAR)	mes.	88 - 63	110 - 57	142 - 75	165 - 100
	calc.	83.00	85,0	108	154
I_{fd} (Amp. eff.)	mes.	144	252	360	540
	calc.	197	347	583	853

TABLEAU IX

FONCTIONNEMENT ASYNCHRONE DE LA MACHINE 9

1. INDUCTEUR OUVERT

(%)	0,0449	0.106	0,198	0,315	0,470
(kV)	18.0	17,8	17,3	16,6	15,8
(kA) mes.	3,5	4,58	6,0	7,54	8,96
calc.	3,5	4,38	5,88	7,61	9,57
(MW) mes.	41,8	72,8	118,5	148	168
calc.	30	66	107,4	143,1	165,6
(MVAR) mes.	100,8	121	135,2	158,4	182
calc.	105	117,4	139,5	166	196,2
I_{fd} (Volts eff) mes.	55	123	215	302	396
calc	58,4	133,8	234,6	341,6	452

2. INDUCTEUR FERME SUR RESISTANCE DE DECHARGE

(%)	0,044	0,0936	0,160	0,246
(kV)	16,8	16,5	16,0	15,7
(kA) mes.	3,55	4,68	6,02	7,48
calc.	3,44	4,48	5,97	7,82
(MW) mes.	45,4	83,4	116	145
calc.	37	72,8	108,6	144
(MVAR) mes.	92,8	104,6	120	142,6
calc.	93	105	124,8	156
I_{fd} (Amp. eff.) mes.	72,5	136	210	280
calc.	86,3	180	282	392

3. INDUCTEUR EN COURT-CIRCUIT

(%)	0.0233	0.0555	0 0928	0,1775
(kV)	18,2	17,8	17.2	15,9
(kA) mes.	4,22 - 2,87	6,05 - 3,69	7,84 - 4,78	10,62 - 5,99
calc.	3,6	4,85	6,34	8,66
(MW) mes.	50 - 45	85 -82,5	126 - 114	203 - 182
calc.	40,4	86,2	120,3	146,1
(MVAR) mes.	143 - 100	169 - 90	194 - 103	235 - 134
calc.	106,3	122,4	145,3	188,5
I_{fd} (Amp. eff) mes.	157	332	485	740
calc.	185	414	621,8	896,4

Pour deux sortes de résultats, cette marge est légèrement dépassée : d'une part pour les valeurs très faibles du glissement à inducteur ouvert, la puissance active calculée est un peu trop faible ; ceci peut provenir de la méthode adoptée pour tenir compte de la courbure, puisque celle-ci intervient surtout aux très faibles glissements ; d'autre part, notamment en ce qui concerne la machine 8, le courant inducteur calculé, lorsque l'inducteur est en court-circuit, est trop élevé.

Ces imperfections ponctuelles n'affectent heureusement pas les informations les plus intéressantes recherchées, indiquées au § 3.1.

4 - CONCLUSION GENERALE DE LA CONFRONTATION ENTRE LES RESULTATS DU CALCUL ET DES ESSAIS.

En ce qui concerne les divers régimes envisagés pour les turboalternateurs, le modèle mathématique donne des résultats satisfaisants pour des technologies très diverses et pour un grand éventail de glissements (pratiquement $0 < g \leq 2$) , ou encore de fréquences ($0 < f \leq 100$ Hz).

L'erreur reste généralement inférieure à 20 %, mais dépasse cependant parfois cette valeur. Etant donné la complexité du problème et les hypothèses simplificatrices qu'il a été nécessaire d'adopter, soit en vue de rendre le calcul réalisable économiquement, soit en raison du manque de connaissance relative à certains paramètres physiques, ce résultat est satisfaisant, et en tous cas propre à fournir aux utilisateurs un outil utile en vue des prédéterminations de comportement.

En outre, il faut bien noter que ce modèle a été établi uniquement à partir de considérations théoriques, et que les valeurs numériques des paramètres n'ont en aucun cas été réajustées en vu des résultats expérimentaux (à la seule exception de la réactance de magnétisation lors des petites oscillations, voir conclusion § 2.3).

La précision du modèle peut alors être considérablement améliorée si on tolère un réajustement en fonction des résultats d'expérience ; une telle pratique est tout à fait justifiée si elle est maniée avec discernement, mais sa mise en oeuvre sortirait du cadre du présent travail.

ANNEXES

Contribution à l'étude des régimes variables des turboalternateurs de grande puissance

Figure 1

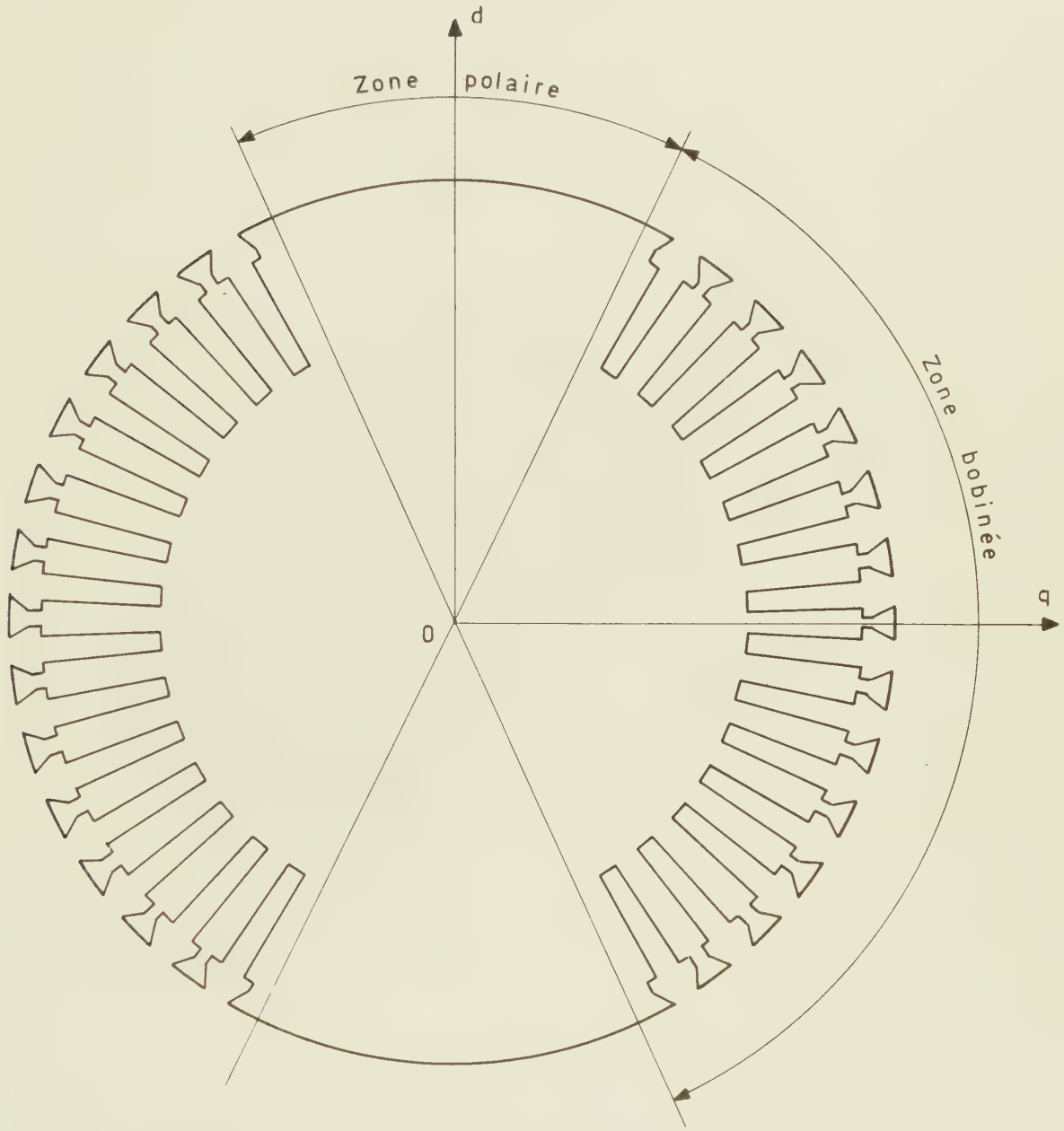


Fig.1. SECTION DROITE DU FER D'UN ROTOR BIPOLAIRE

Figure 2

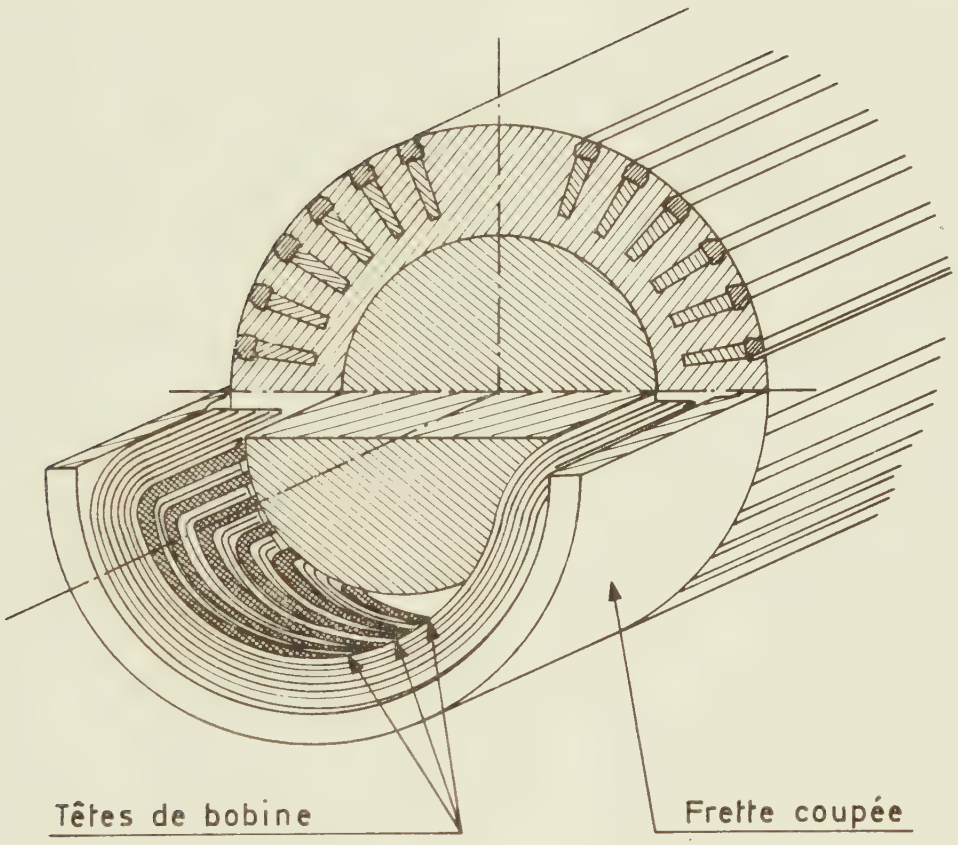


Fig_2_ VUE EN PERSPECTIVE DE L'EXTREMITE D'UN ROTOR BIPOLAIRE

Figure 3

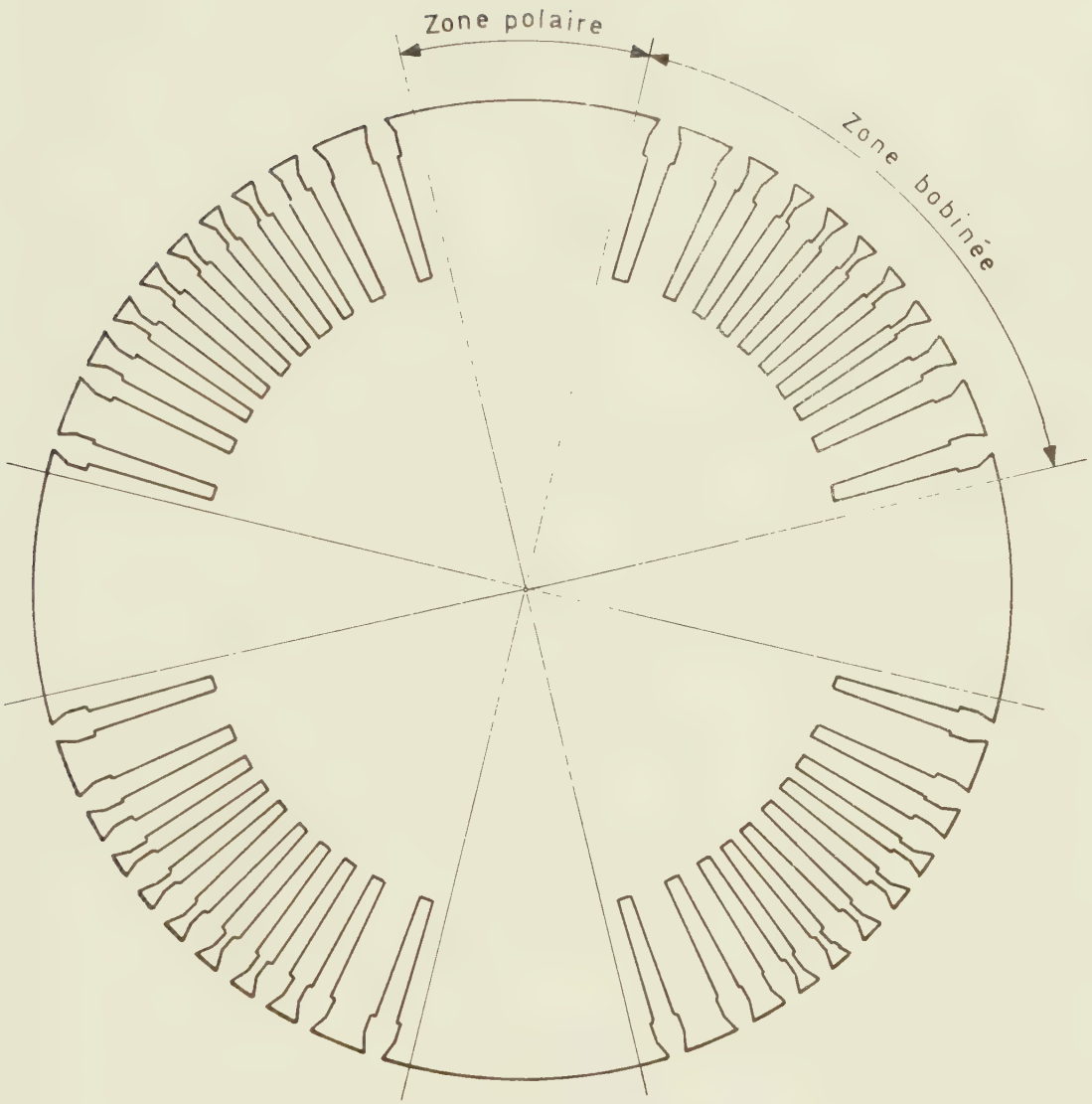
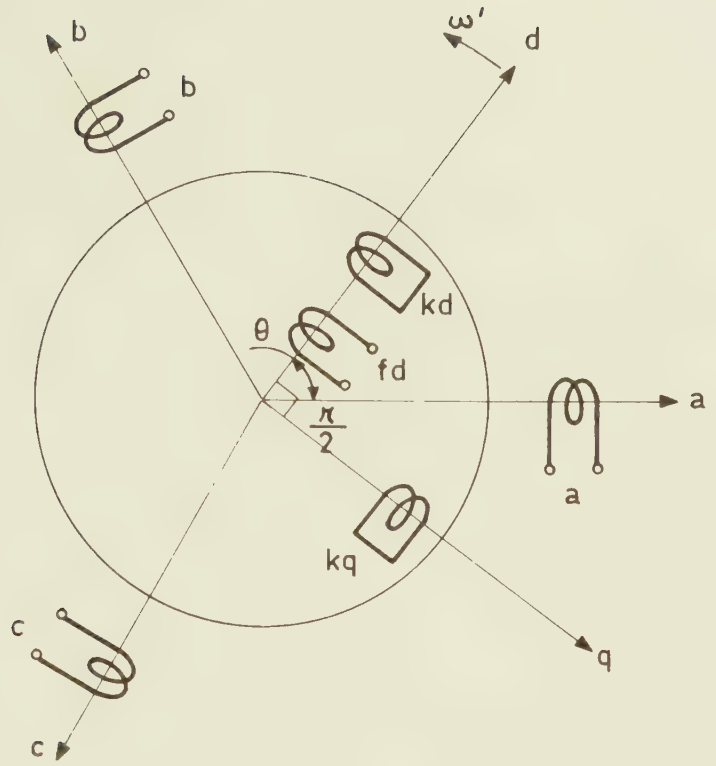
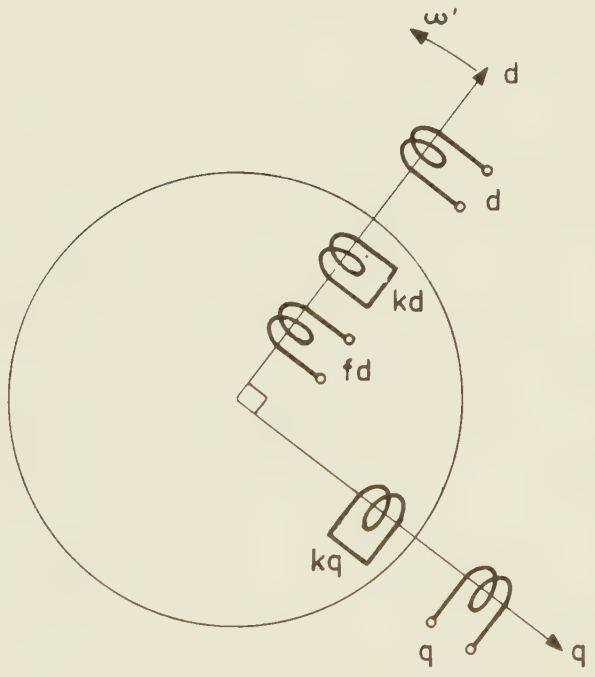


Fig.3. SECTION DROITE DU FER D'UN ROTOR QUADRIPOLAIRE

Figure 4



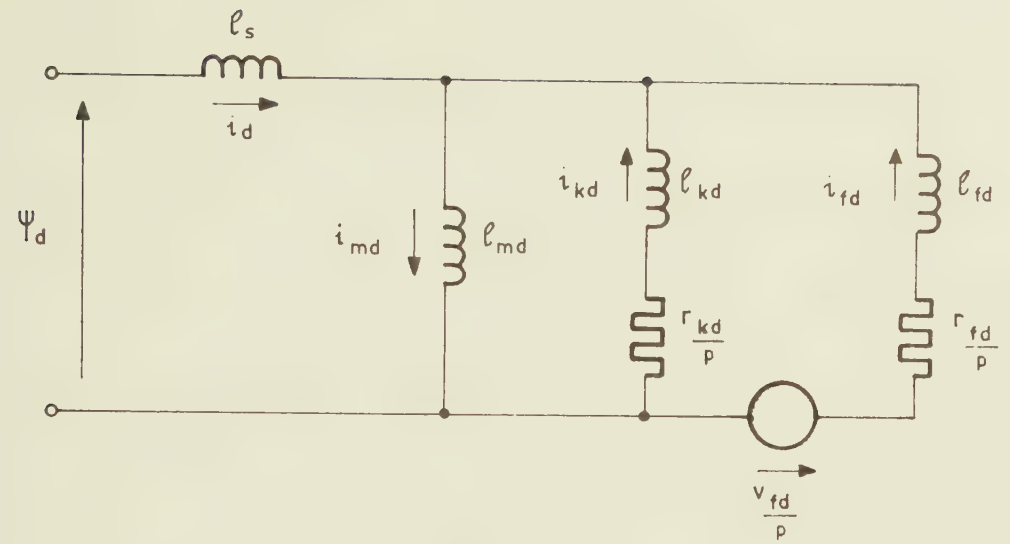
(a)



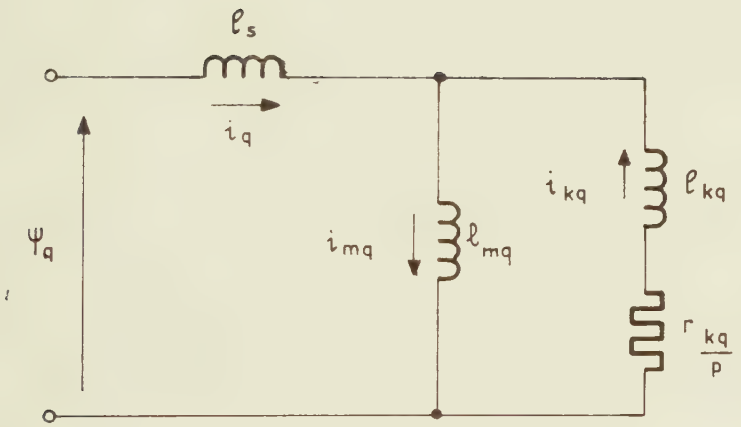
(b)

Fig_4_ SUBSTITUTION DES ENROULEMENTS PSEUDO-STATIONNAIRES d et q AUX ENROULEMENTS STATIONNAIRES a, b, c.

Figure 5



(a)



(b)

Fig_5_ SCHEMAS EQUIVALENTS "USUELS" DES MACHINES SYNCHRONES

(a)_ DANS L'AXE DIRECT

(b)_ DANS L'AXE EN QUADRATURE

Figure 6

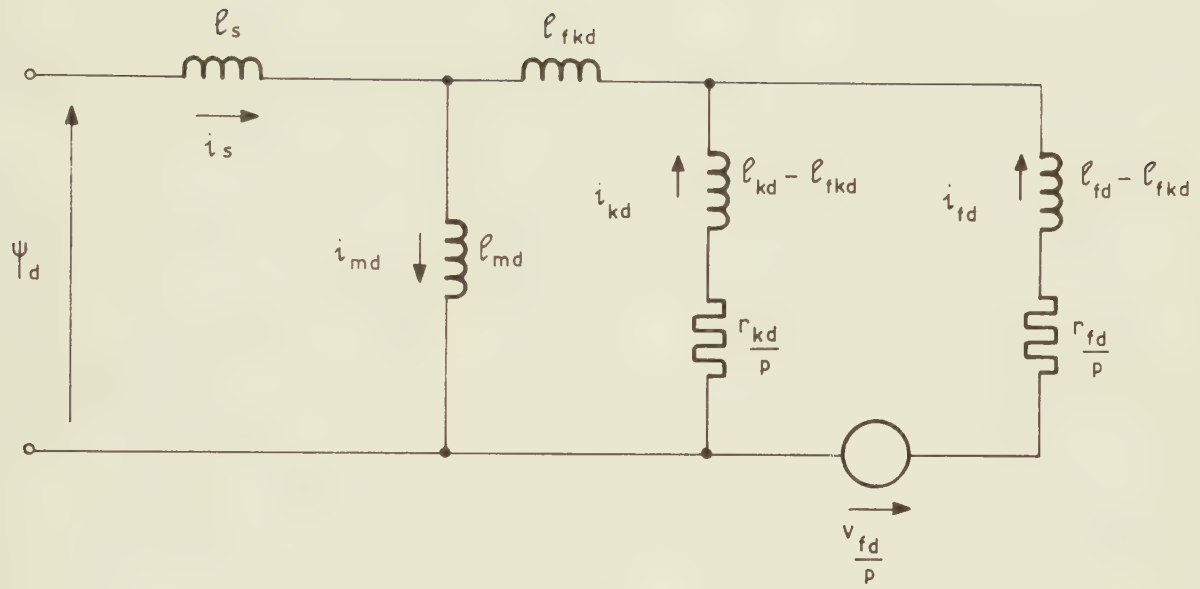


Fig.6. SCHEMA EQUIVALENT D'AXE DIRECT AVEC PRISE EN COMPTE DES "FUITES COMMUNES" ENTRE L'AMORTISSEUR ET L'INDUCTEUR

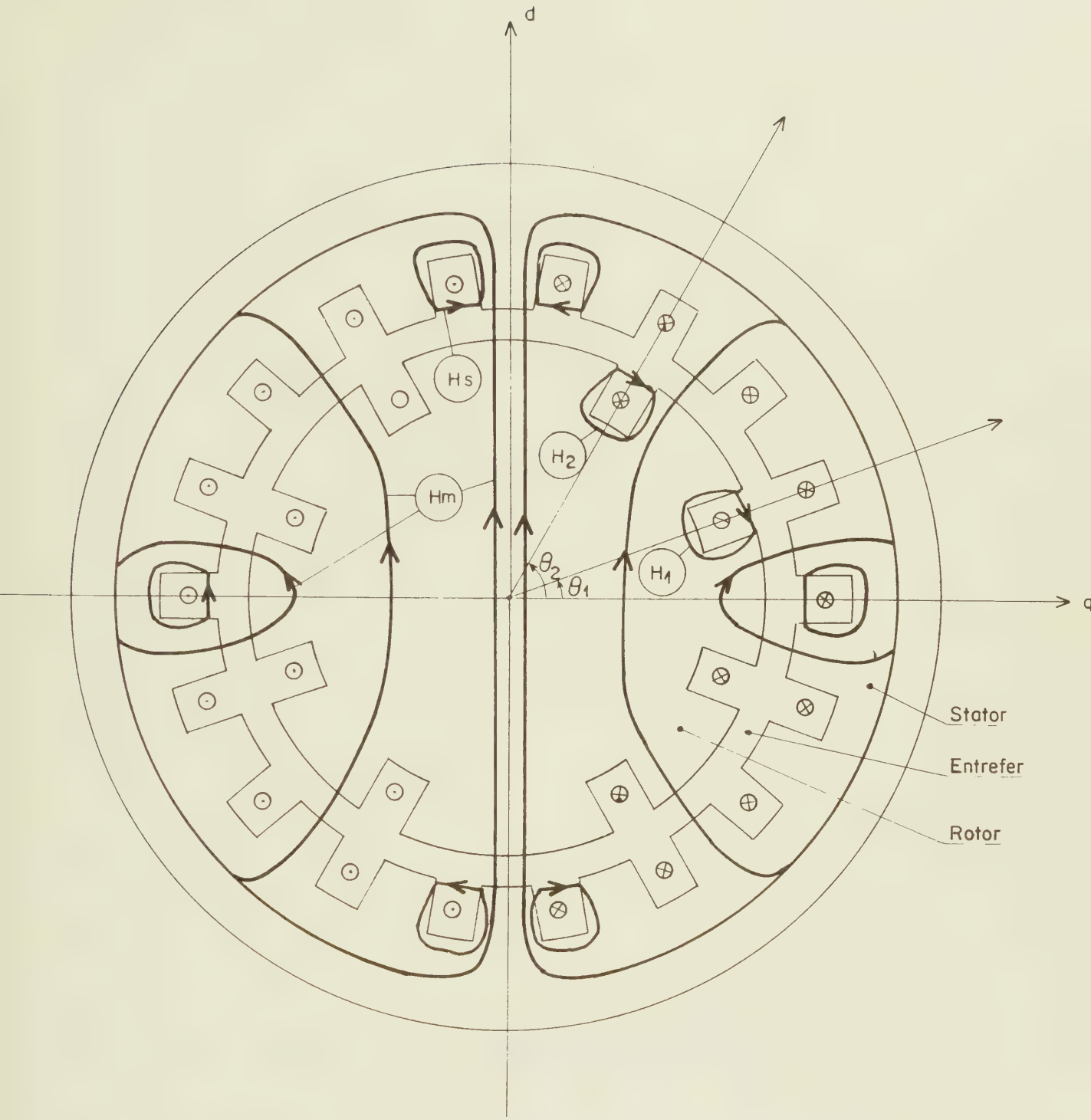


Fig. 7. Contours d'intégration classiquement adoptés pour le calcul du champ, puis des impédances propres et mutuelles

Figure 8

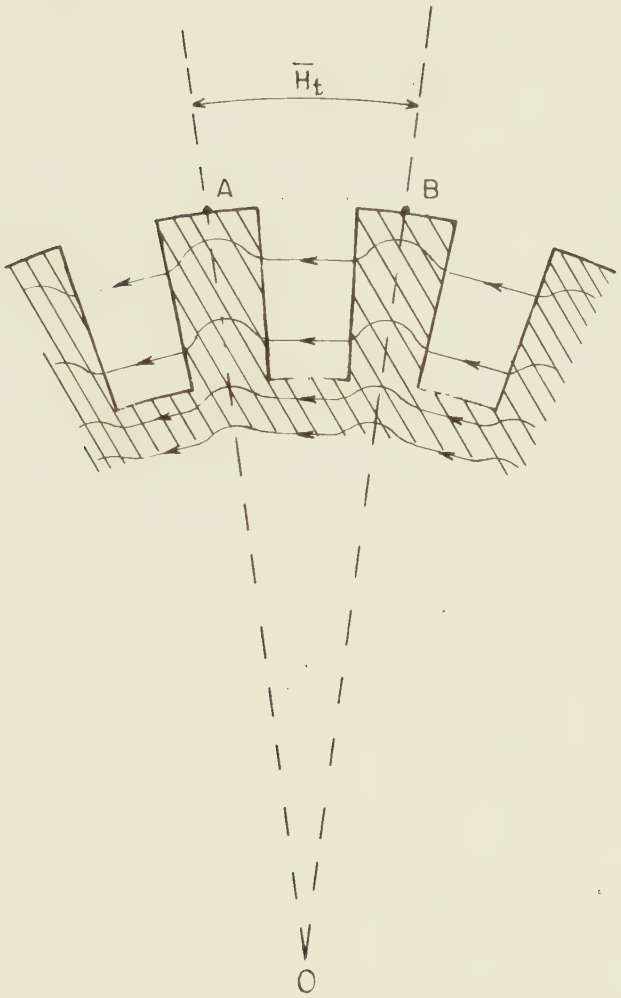
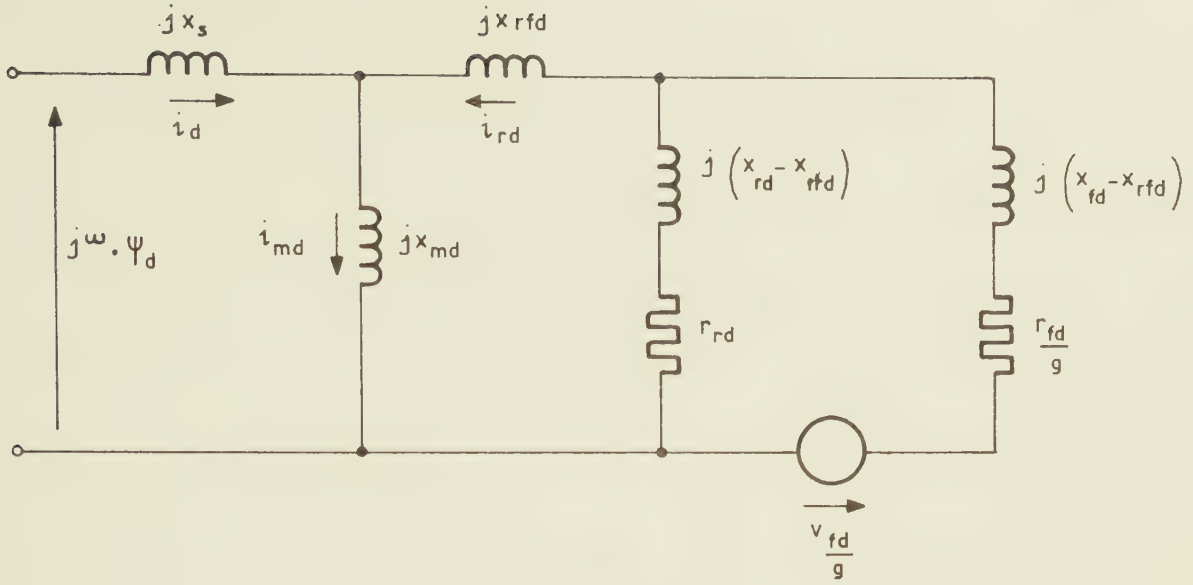
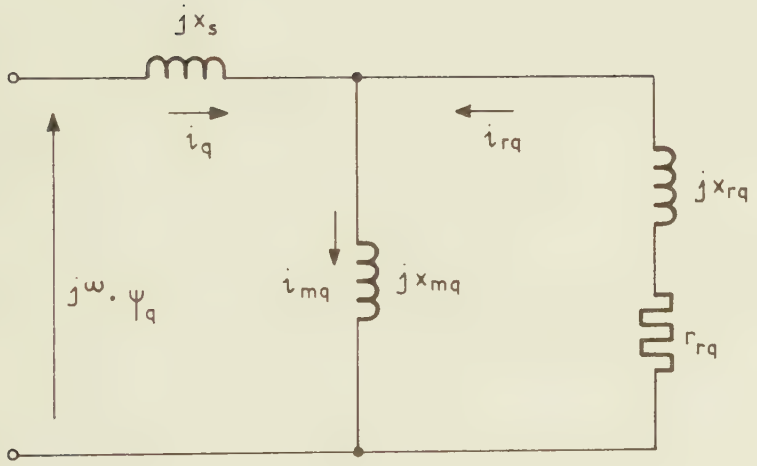


Fig.8. Allure des lignes de champ sur un pas dentaire, associées à la composante tangentielle du champ dans l'entrefer.

Figure 9



(a)



(b)

Fig - 9 - SCHEMAS EQUIVALENTS EN REGIME HARMONIQUE UTILISES DANS LA PRESENTE ETUDE

(a) - AXE DIRECT

(b) - AXE EN QUADRATURE

Figure 10

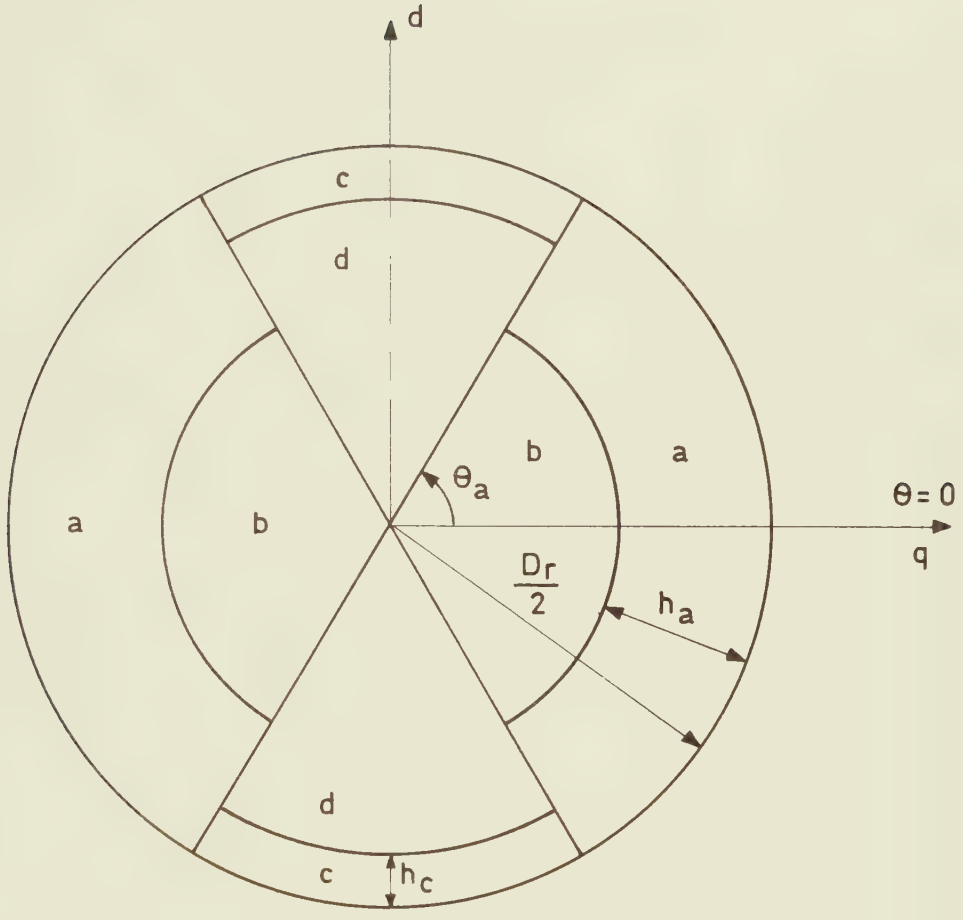


Fig .10.

LES DIFFERENTES ZONES DU ROTOR

Figure 11

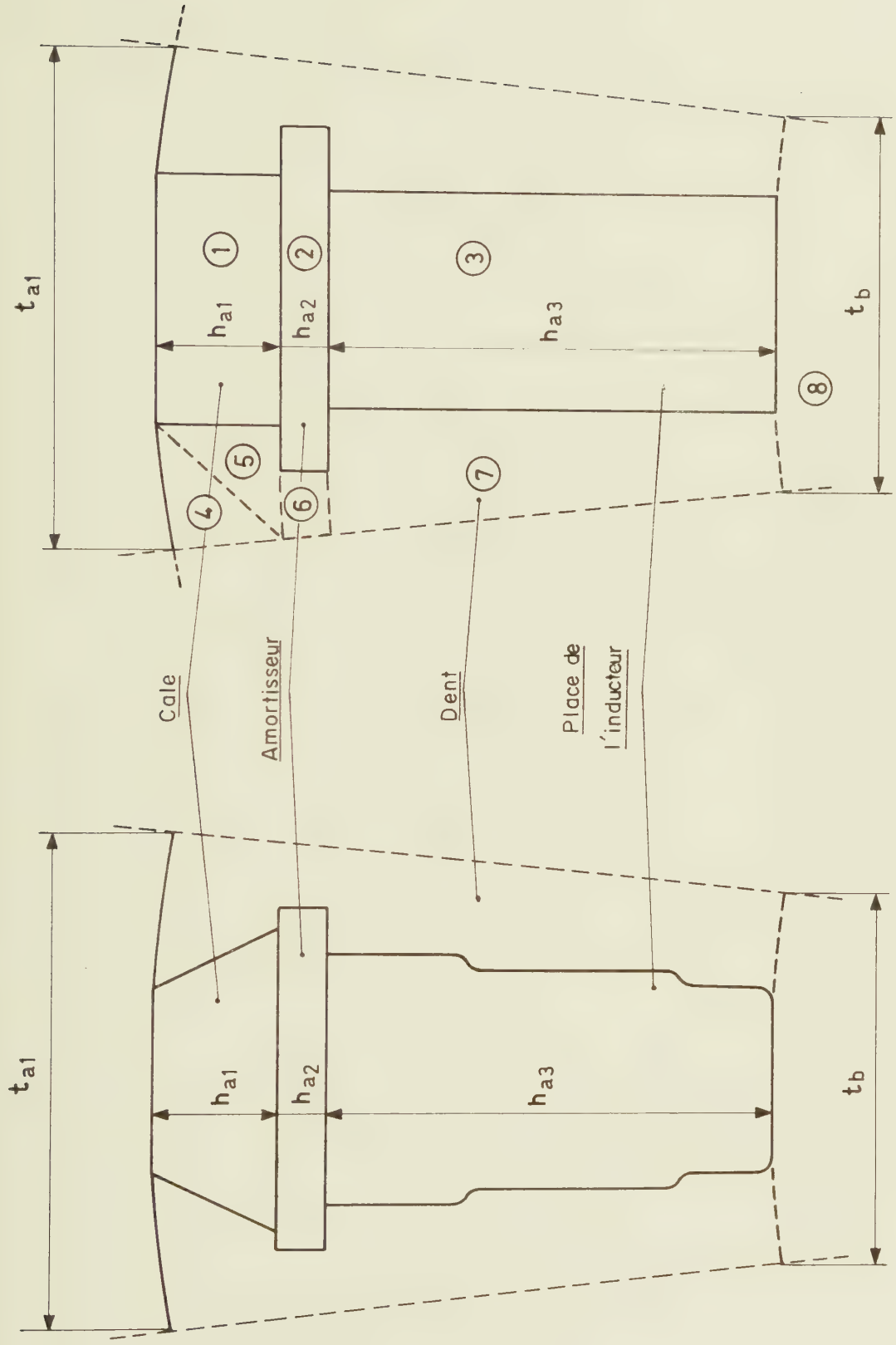


Fig.11 - SCHEMATISATION D'UN PAS DENTAIRE DE LA ZONE BOBINEE ET EMPLACEMENT DES DIFFERENTES REGIONS.

Figure 12

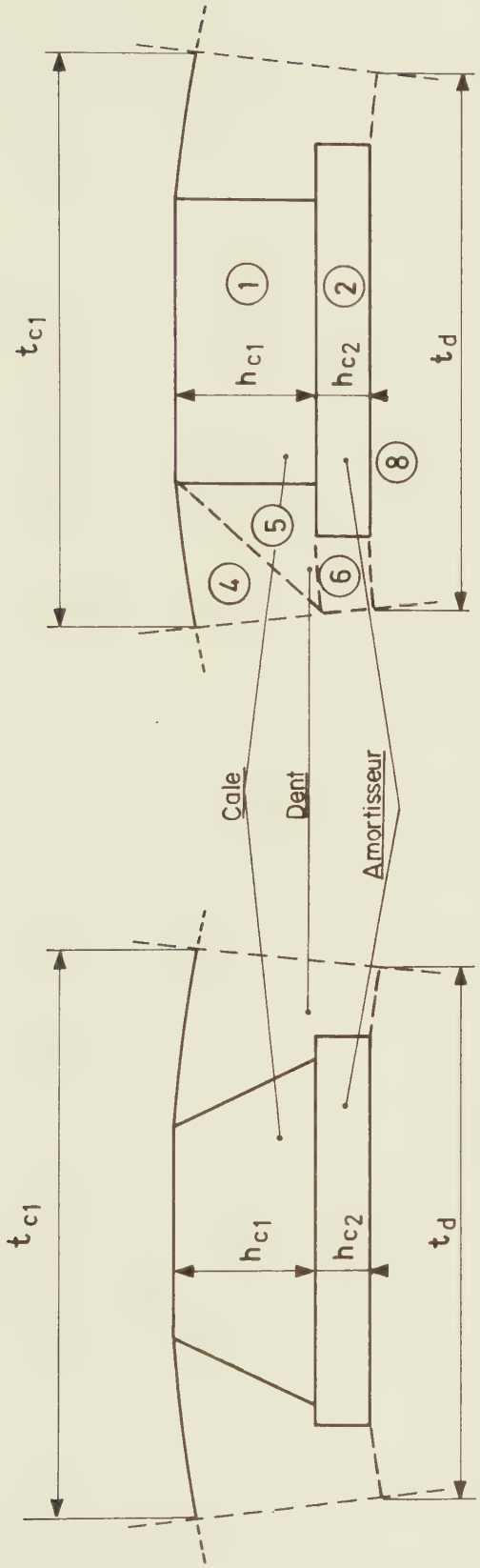


Fig.12- SCHEMATISATION D'UN PAS DENTAIRE DE LA ZONE POLAIRE ET EMPLACEMENT DES DIFFERENTES REGIONS.

Figure 13

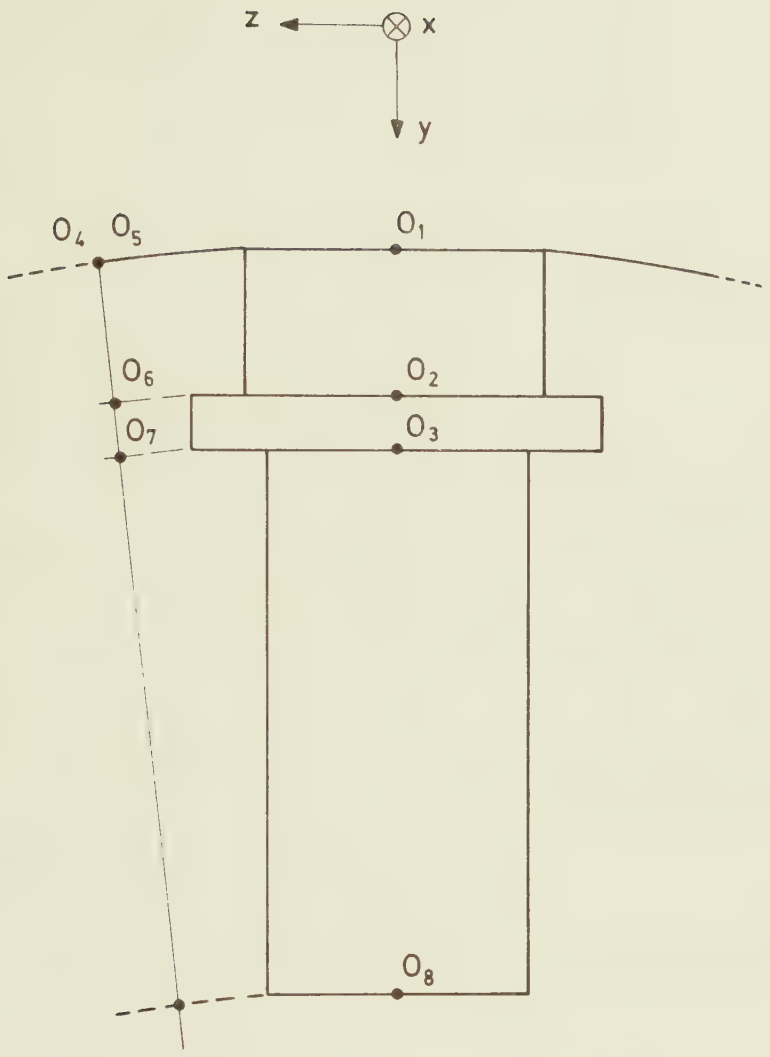


Fig 13 - ORIENTATION DES AXES DE COORDONNEES ET ORIGINES DES COORDONNEES PARTICULIERES A CHAQUE REGION.
(cas d'un pas dentaire de la zone bobinée).

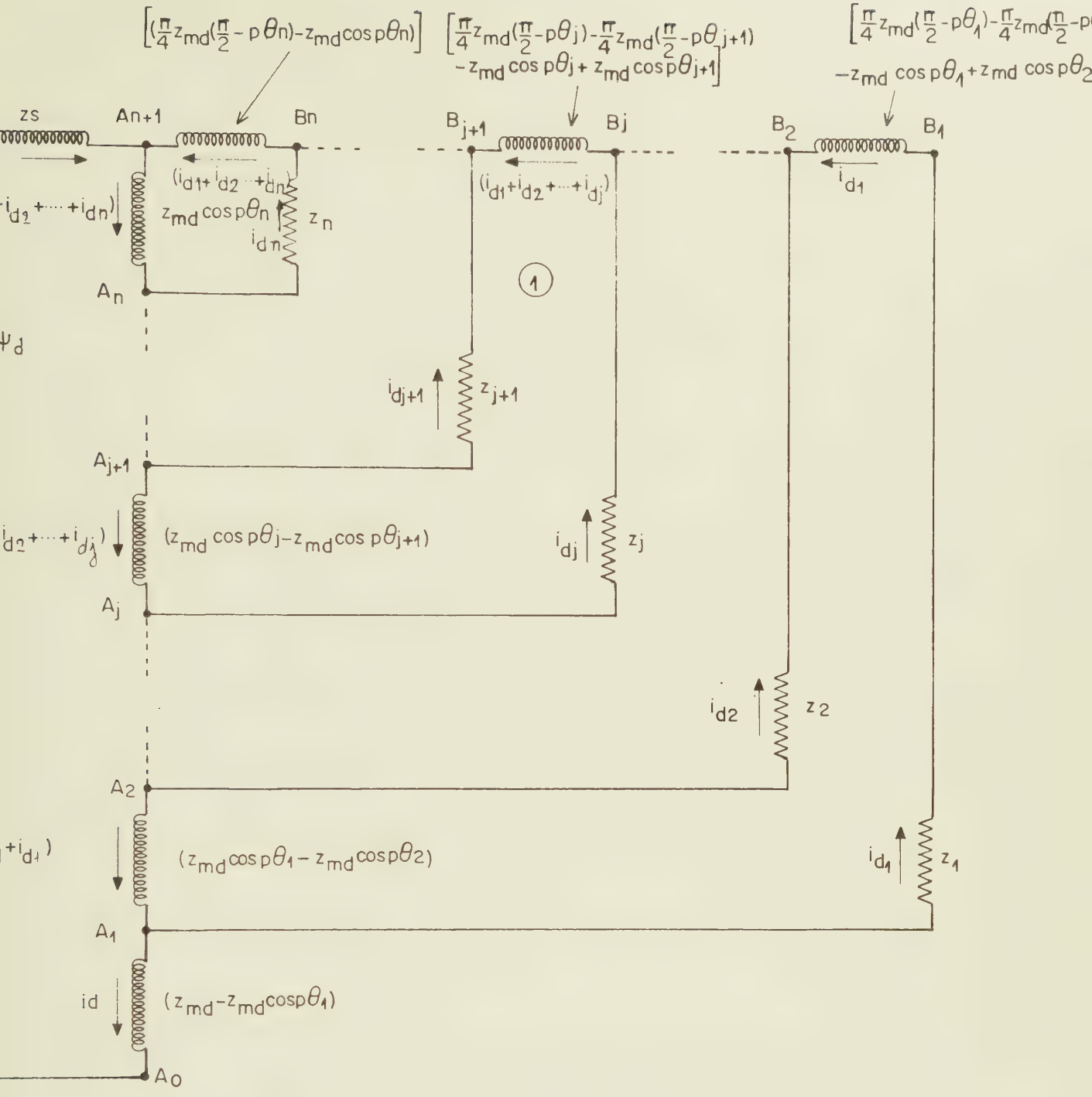


Fig. 14

Structure du schéma équivalent complet, à inducteur ouvert, traduisant l'influence mutuelle de toutes les encoches rotoriques prises individuellement

Figure 15

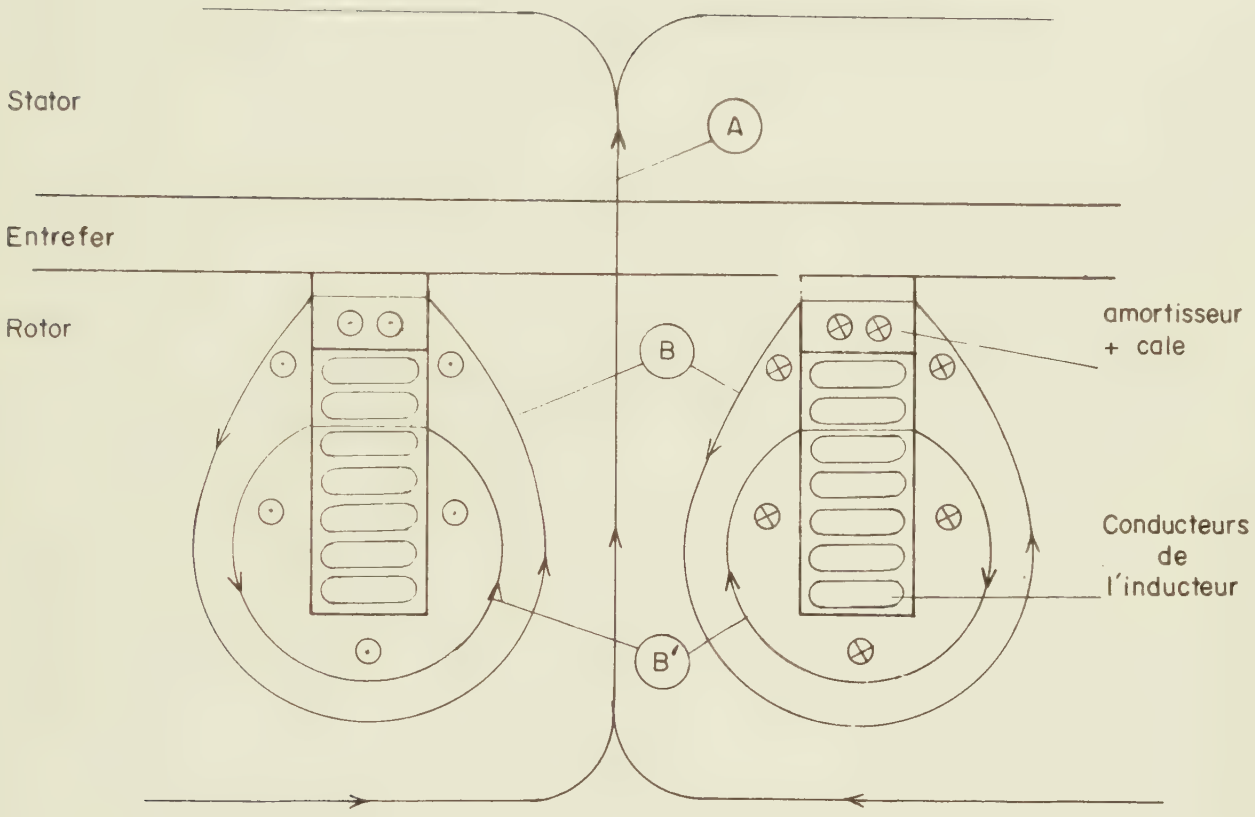


Fig. 15. Schématisation des contours d'intégration du champ magnétique en vue de l'évaluation de la réactance commune aux circuits massifs du rotor et à l'inducteur.

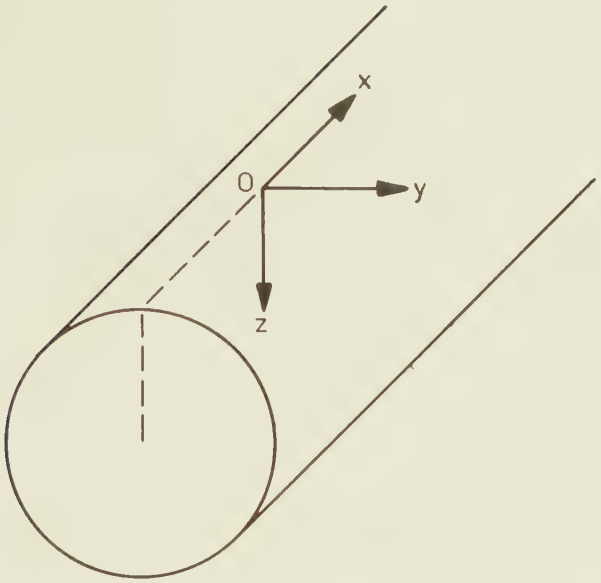


Fig. 16 Disposition du trièdre de coordonnées

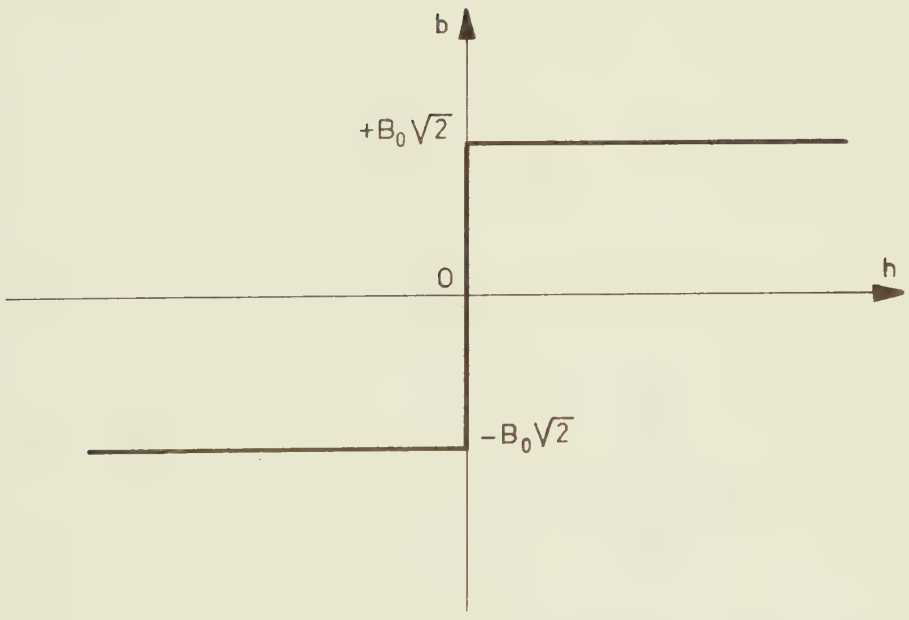


Fig.17 – Courbe de magnétisation rectangulaire

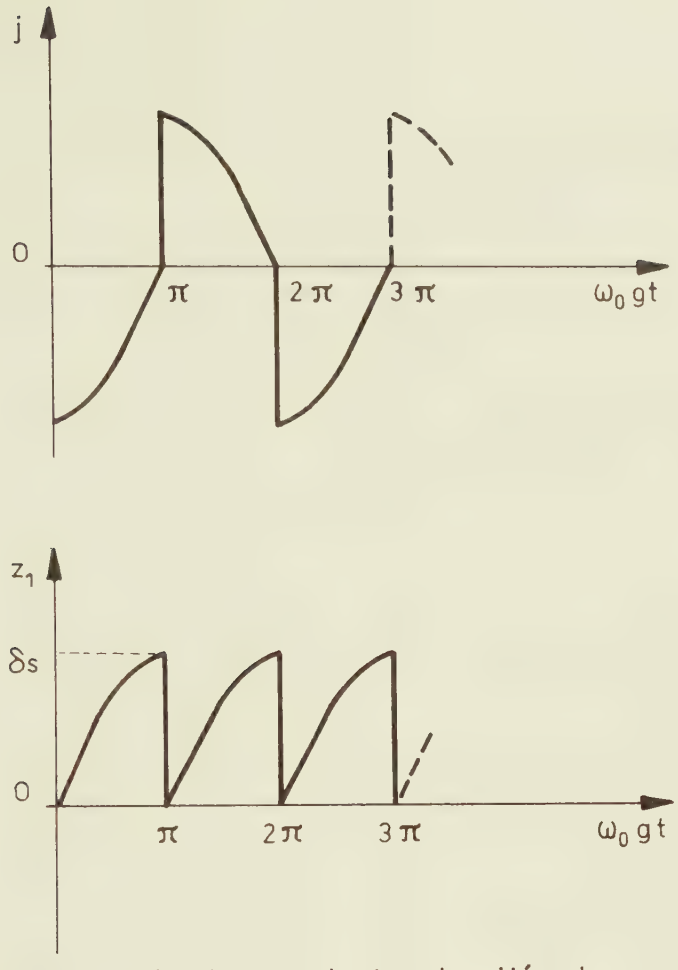


Fig.18 _ Variation au cours du temps de la densité de courant j et de l'abscisse du front d'inversion de l'induction

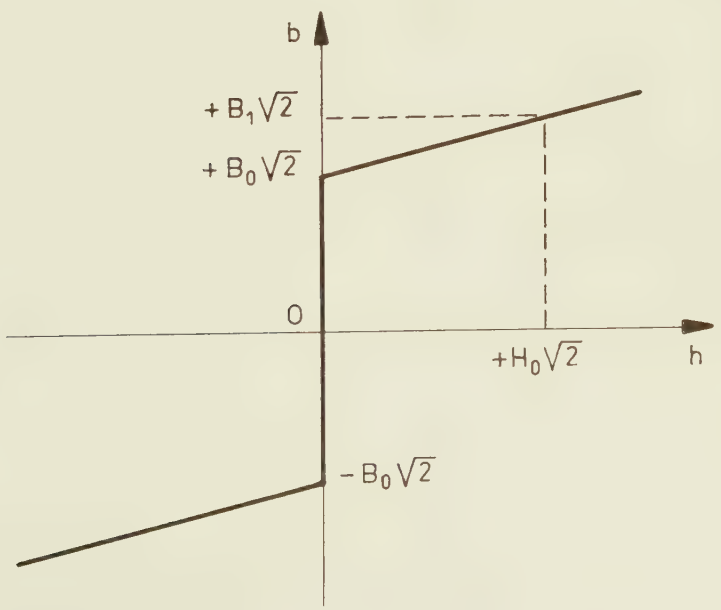


Fig.19 _ Schématisation améliorée de la courbe de magnétisation

Figure 20

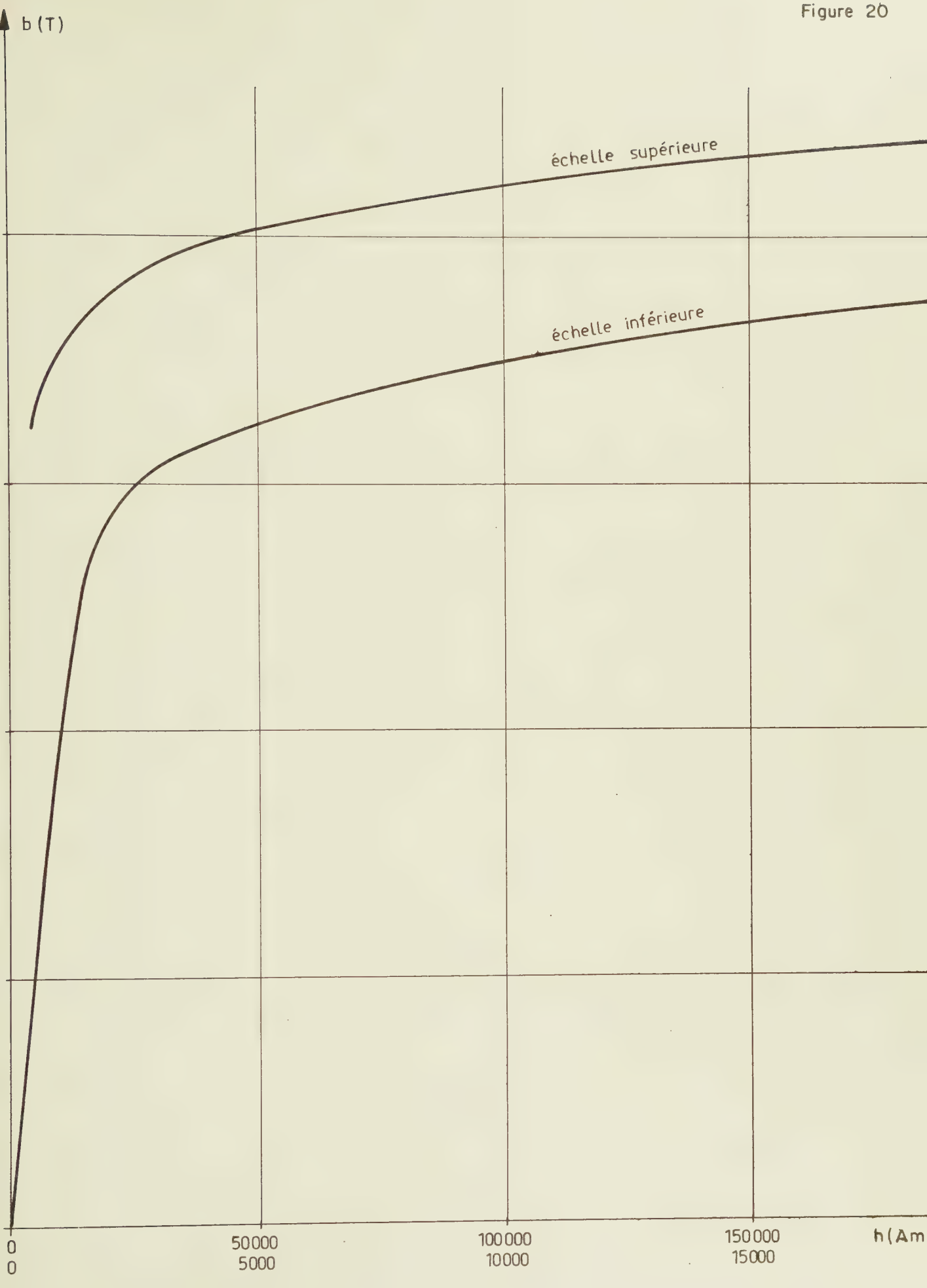
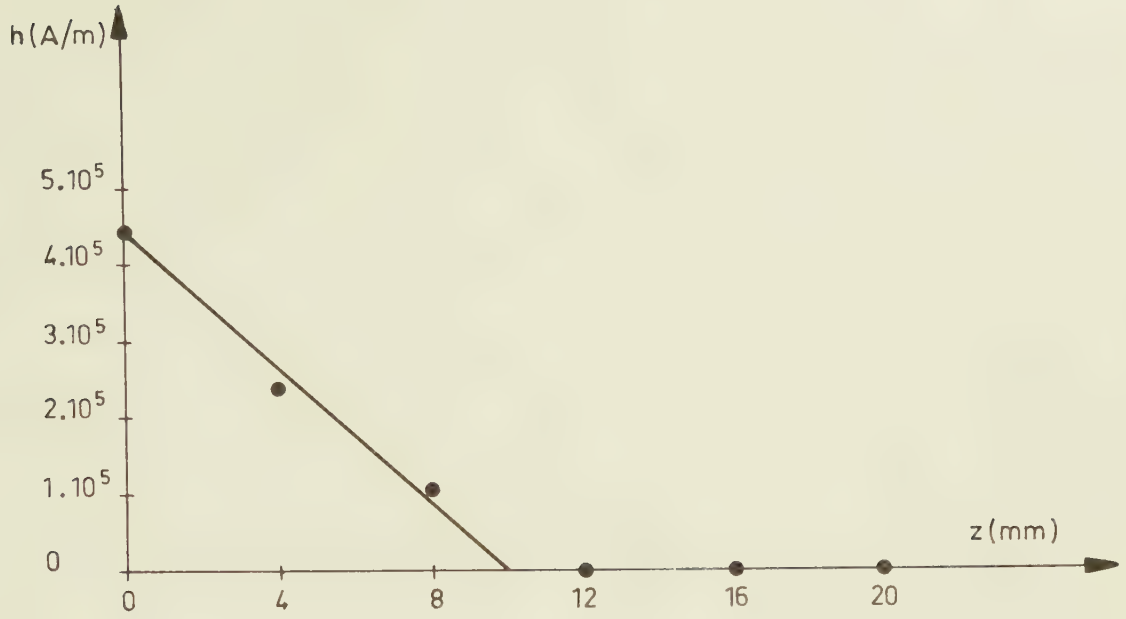
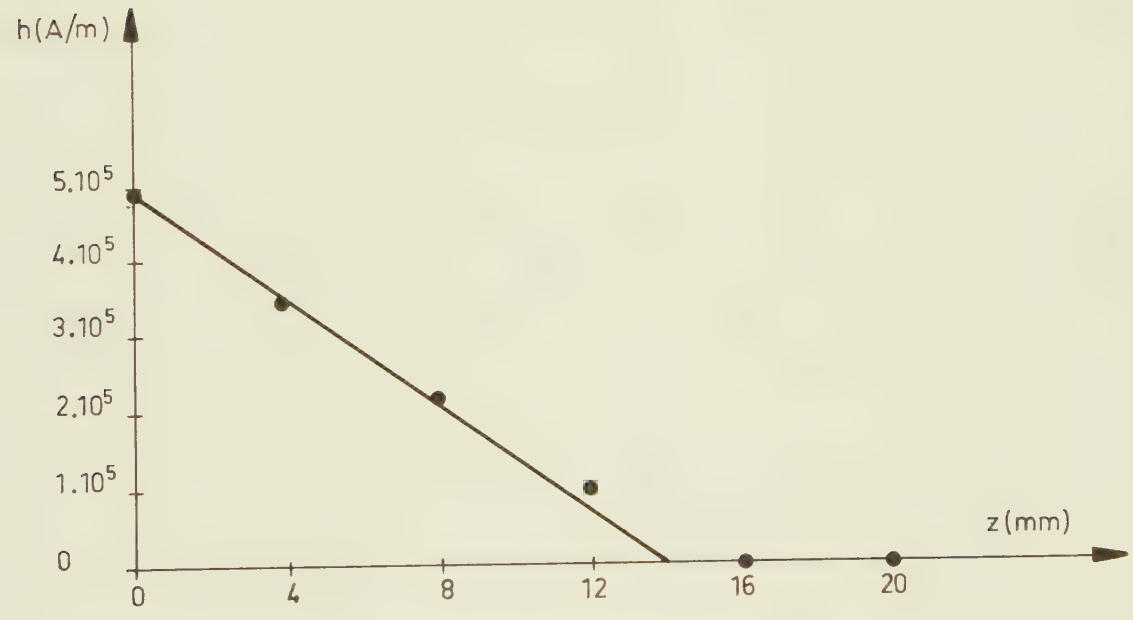


Fig.20 _ Courbe de magnétisation réelle

Figure 21



a) $\omega_0 gt_1 = \frac{\pi}{3}$

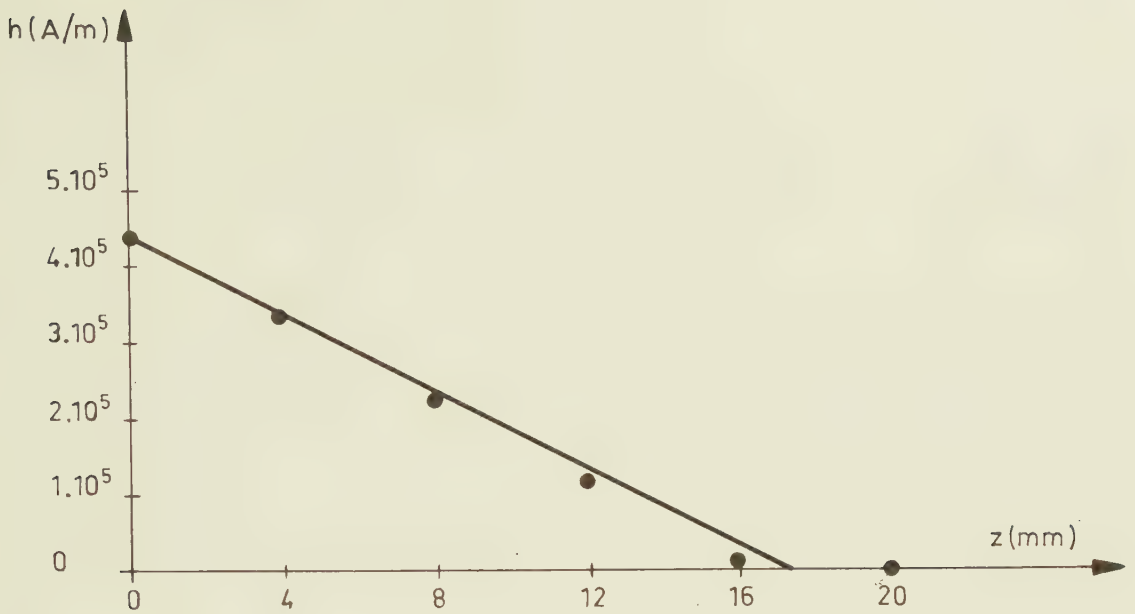


b) $\omega_0 gt_1 = \frac{\pi}{2}$

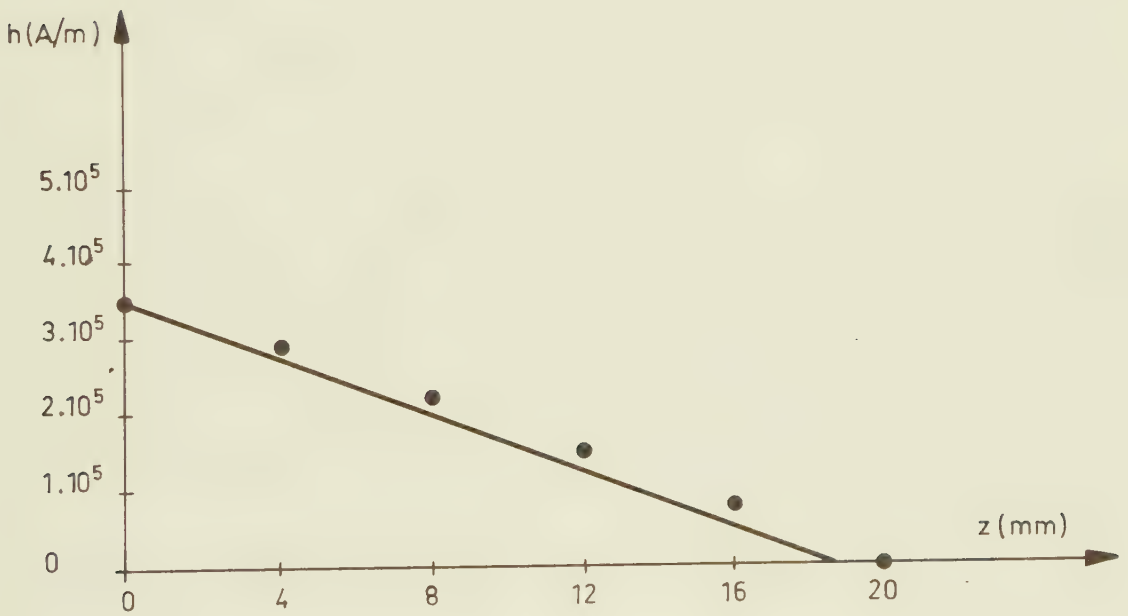
Fig. 21 – —— Distribution idéale correspondant à la théorie § 1.4

• Valeurs calculées numériquement

Figure 21 (suite)



c) $\omega_0 g t_1 = \frac{2\pi}{3}$

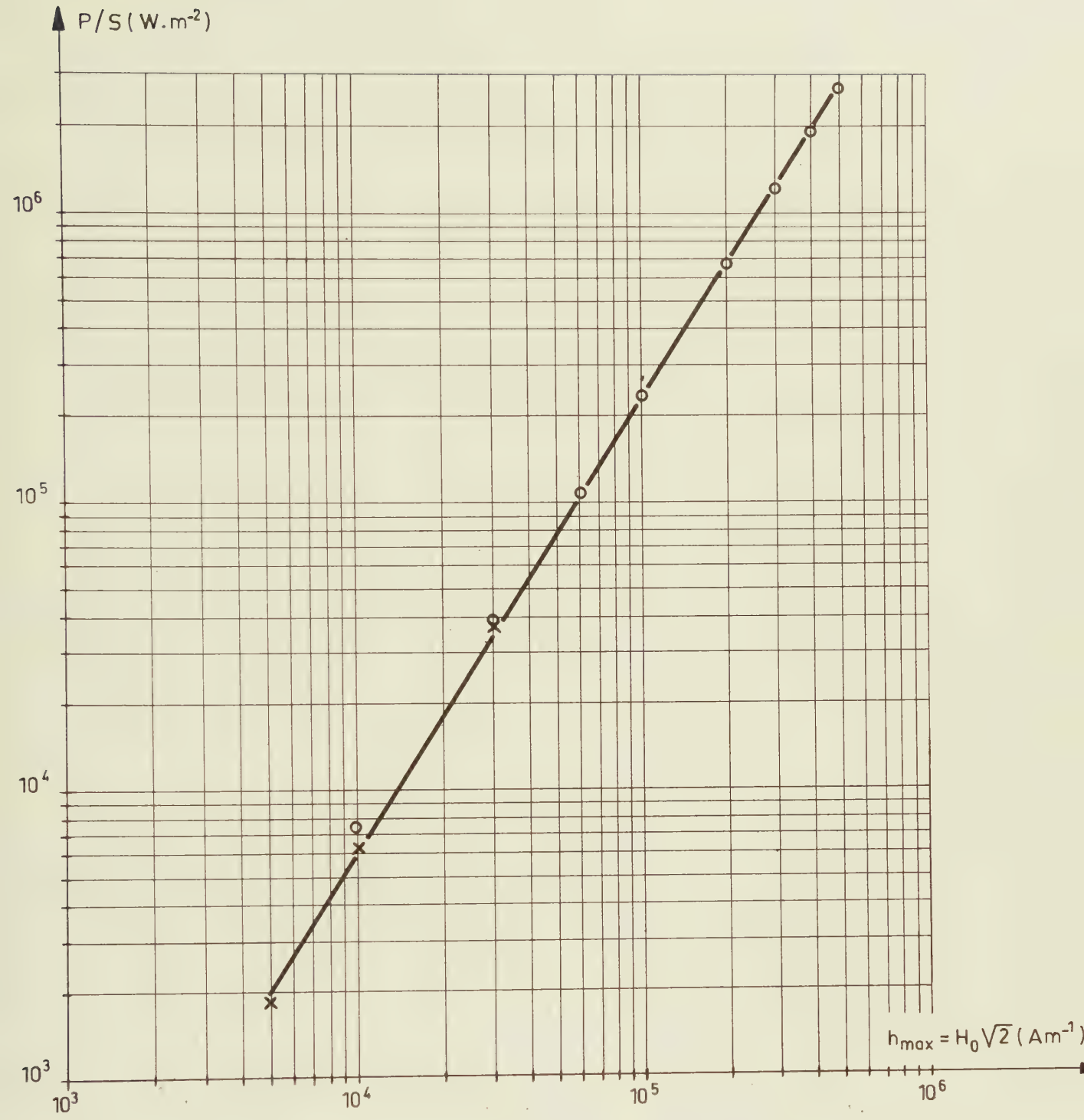


d) $\omega_0 g t_1 = \frac{3\pi}{4}$

Fig.21(suite) – ——— Distribution idéale correspondant à la théorie § 1.4

• Valeurs calculées numériquement

Figure 22



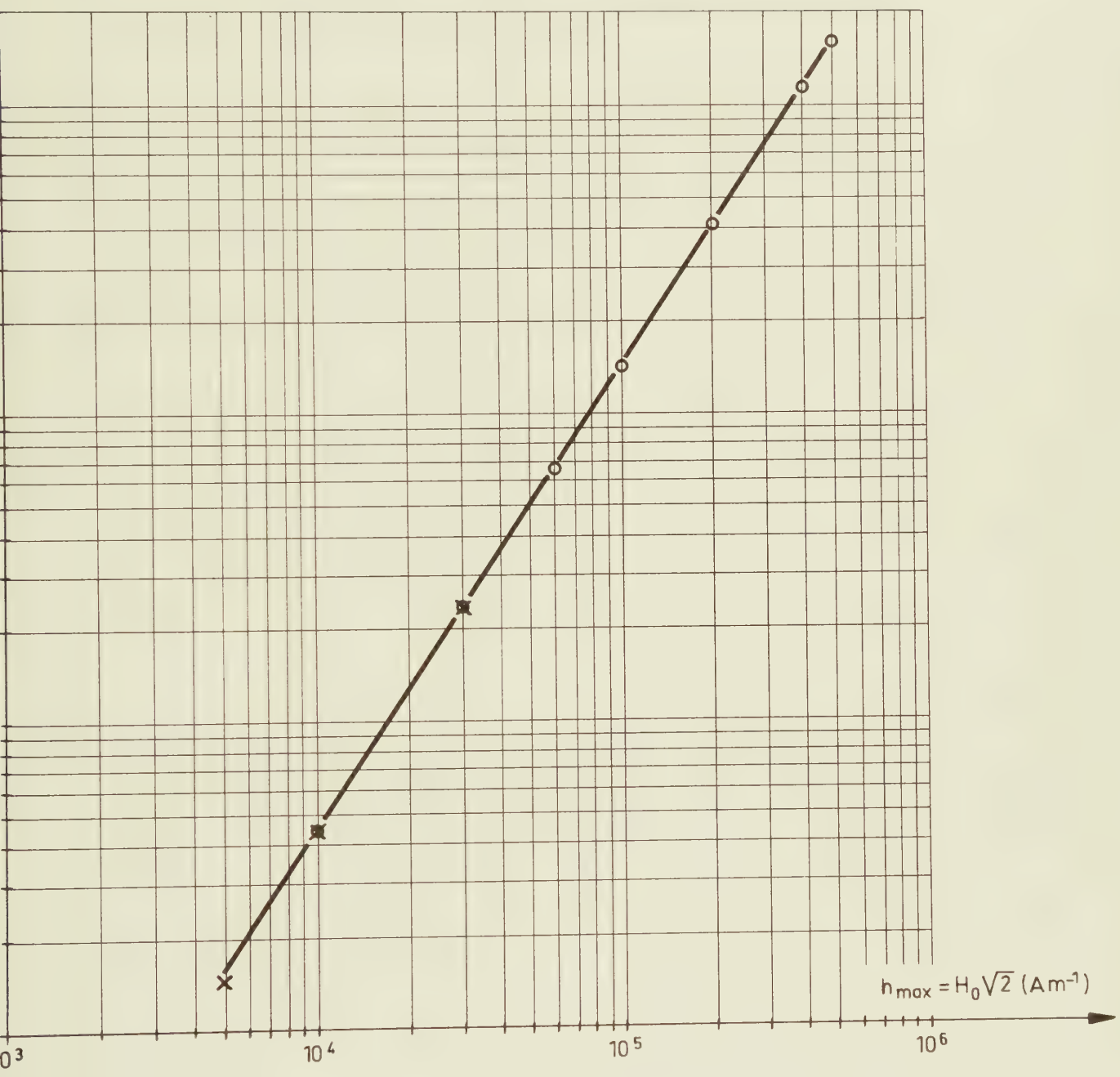
——— calcul numérique à l'ordinateur

o résultats de la théorie simplifiée pour $H_0\sqrt{2} \geqslant 60000$

× " " " pour $H_0\sqrt{2} < 60000$

Fig. 22 _ Puissance active par unité de surface, en fonction du champ maximal appliqué

Figure 23



——— calcul numérique à l'ordinateur

o résultats de la théorie simplifiée pour $H_0\sqrt{2} \geqslant 60\,000$

× " " " pour $H_0\sqrt{2} < 60\,000$

Fig.23 – Puissance réactive par unité de surface, en fonction du champ maximal appliqué

Figure 24

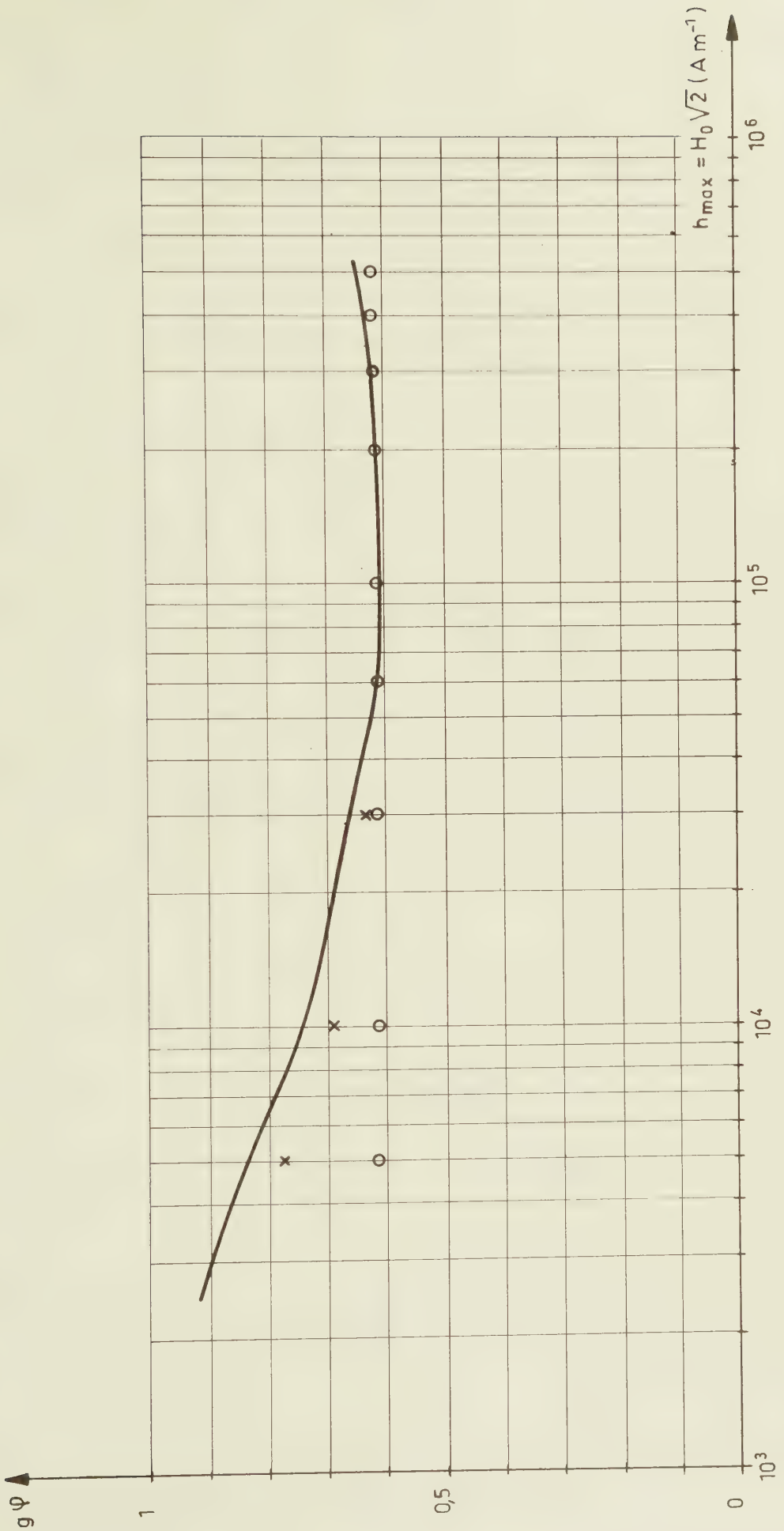
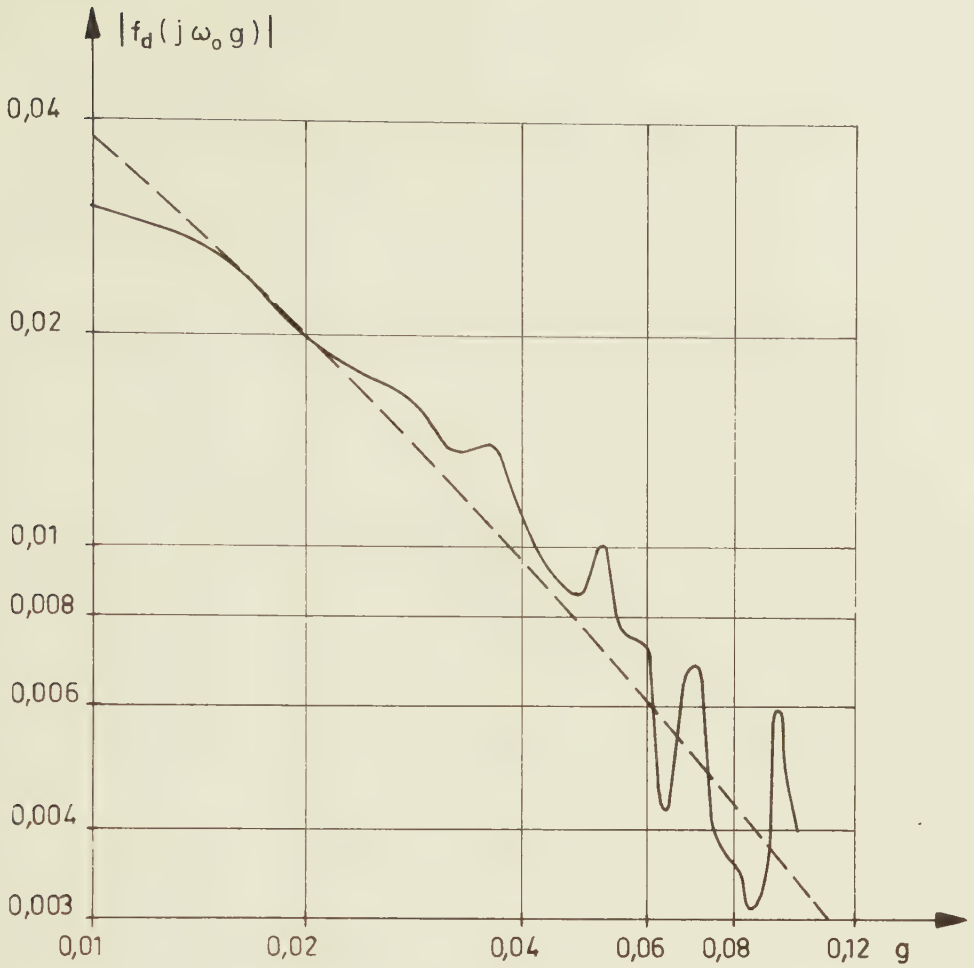


Fig.24 – tg $\varphi = \varrho/p$ du fer en fonction du champ maximal appliqué

Figure 25



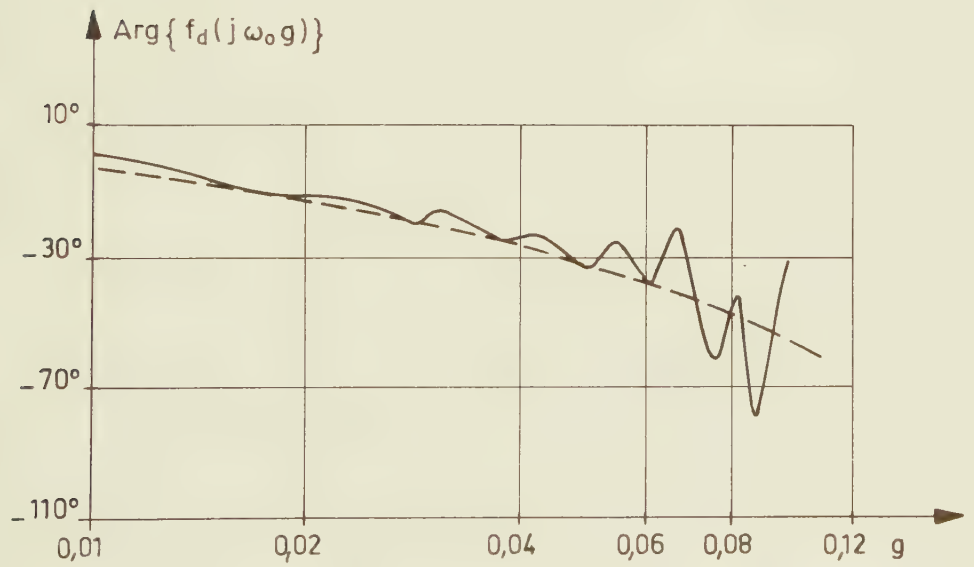
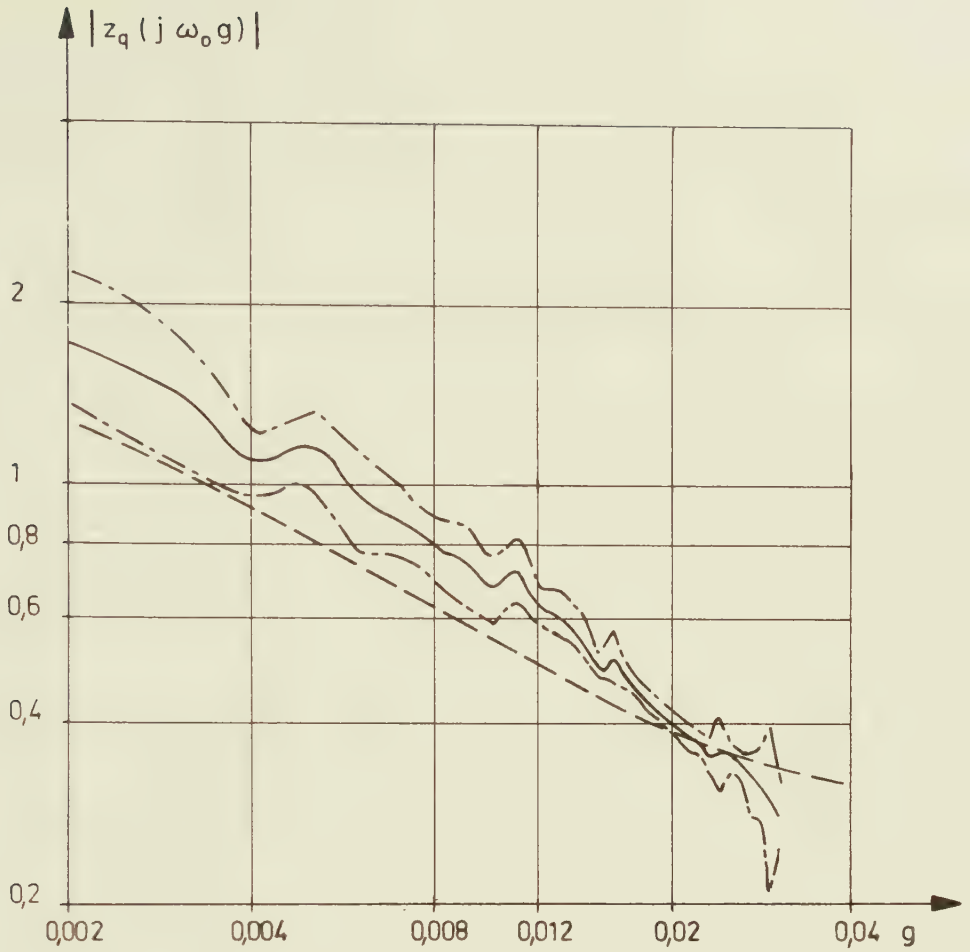


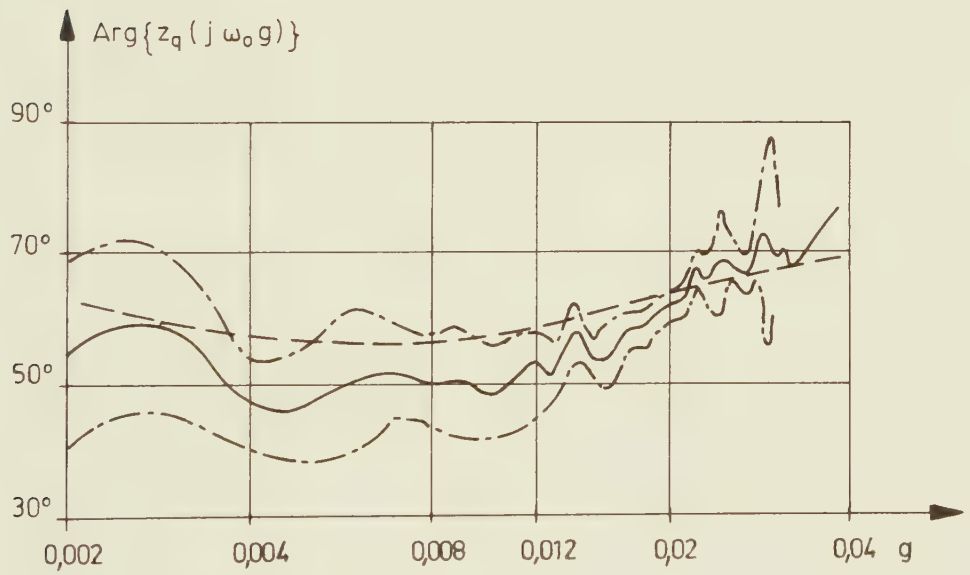
FIG. 25

prévisions théoriques
estimation statistique

alternateur n°5 – Comparaison entre les résultats de la théorie et des essais, régime de petites oscillations de pulsation $\omega_o g$, relative à f_d

Figure 26





prévisions théoriques
estimation statistique
limites de confiance statistiques à 95 % de l'estimation

FIG. 26

Turboalternateur n° 5 _ Comparaison entre les résultats de la théorie et des essais, en régime de petites oscillations de pulsation $\omega_o g$, relative à z_q

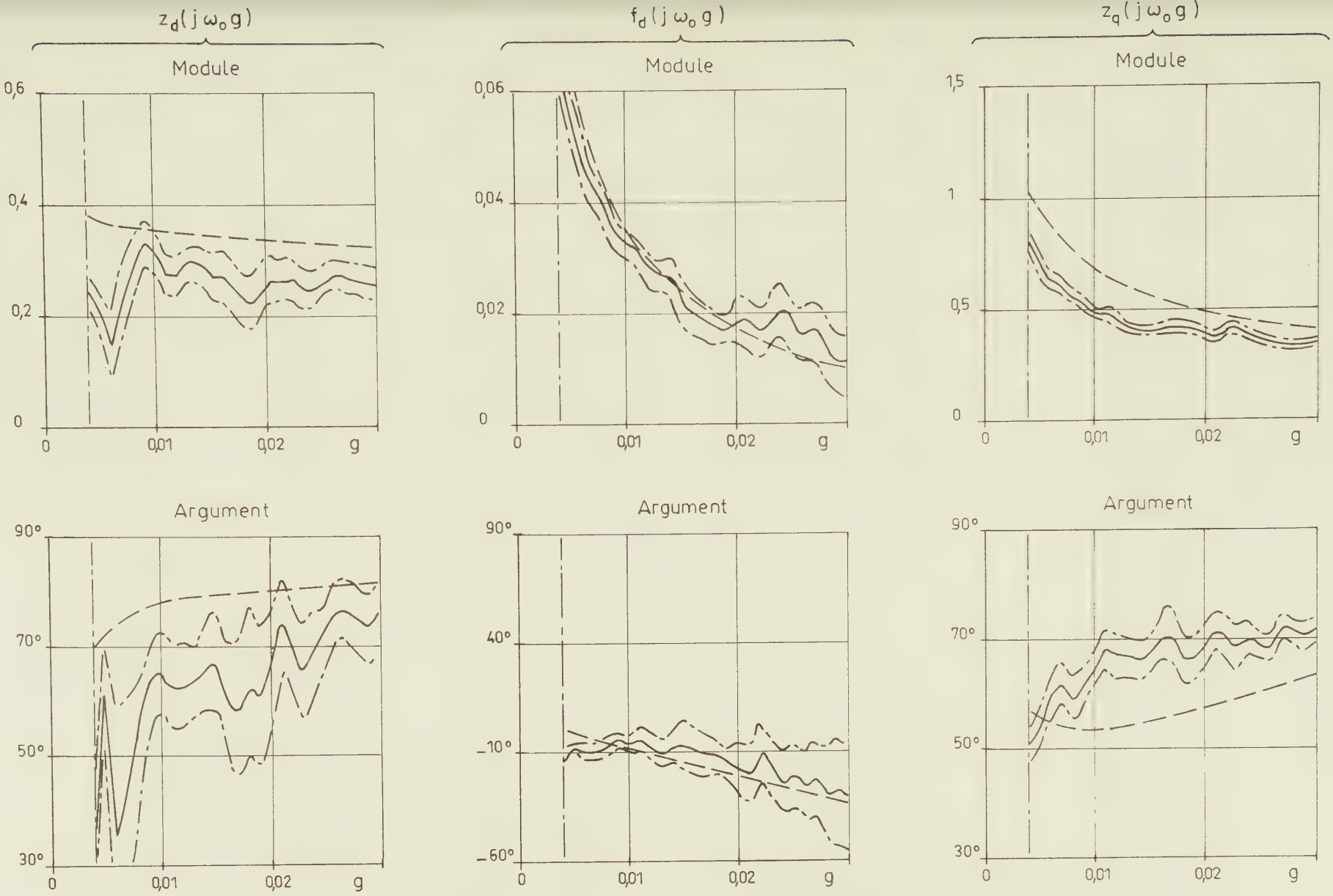


FIG. 27

Turboalternateur n° 6 _ Comparaison entre les résultats de la théorie et des essais, en régime de petites oscillations de pulsation $\omega_o g$

Figure 27

Annexe A

INFLUENCE DE LA COURBURE DANS LE SCHEMA EQUIVALENT D'UNE MACHINE A ROTOR MASSIF CYLINDRIQUE

A.1. RESUME ET MODALITES D'APPLICATION.

La présente annexe constitue l'exposé d'une méthode simplifiée permettant de prendre en compte le fait que les phénomènes de pénétration dans le fer massif d'un turboalternateur se manifestent dans un volume limité par une surface cylindrique et non plane. Il a paru judicieux avant l'exposé proprement dit qui commence au § A.2. d'annoncer dès l'abord les résultats et les modalités d'application de cette étude, du fait qu'elle ne présente pas d'intérêt théorique mais par contre une grande utilité pratique.

A.1.1 - Rotor massif isotrope, en régime asynchrone.

Soit une machine tournante dont le stator est triphasé et le rotor cylindrique constitué d'un matériau massif homogène de perméabilité relative μ et de résistivité ρ . Le nombre de paires de pôles p est quelconque, mais ici on s'est limité à $p = 1$ et $p = 2$.

On établira dans la présente annexe que son comportement en régime asynchrone peut être, avec une bonne approximation, traduit par le schéma monophasé équivalent de la fig. A.3, dans lequel :

R_s est la résistance d'une phase du stator,

$X_s + X_{se}$ est la réactance de fuite du stator (X_{se} représente la part de cette réactance indépendante de la présence des encoches, c'est-à-dire due à la composante tangentielle des lignes de champ dans l'entrefer)

X_m est la réactance de magnétisation proprement dite, incluant le fer du rotor.

La présence de l'entrefer se traduit donc non seulement par la réactance X_m en dérivation, mais aussi par deux réactances série X_{se} placées symétriquement par rapport à X_m .

X_m est donné par les formules (A.40) et (A.41)

(A.40) $$X_{m(\mu=1)} = \frac{24\,\mu_o\,\omega_o\,L\,n'^2_s}{\pi\varepsilon\left(1-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{\mu\varepsilon}\right)}$$

(A.41) $$X_{m(\mu=2)} = \frac{24\,\mu_o\,\omega_o\,L\,n'^2_s}{\pi\varepsilon\left(1-\frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon^2+\frac{1}{2\mu\varepsilon}\right)}$$

X_{se} est donné par les formules (A.8), (A.9), (A.16) et (A.17). On vérifiera qu'il est possible de grouper ces expressions en une seule, utilisant soit (A.40) soit (A.41) selon la valeur de μ , mais à condition d'y faire $\mu = \infty$:

$$X_{se} = \frac{\mu^2\varepsilon^2}{2}\,X_{m(\mu=\infty)}$$

L'impédance $R_r + jX_r$ est donnée par (A.49) et (A.50), à savoir :

(A.49) $$R_r = \frac{48\,\rho\,\mu^2\,L\,n'^2_s}{g\,\pi\,\delta\,D_r}\cdot k_{r\mu}$$

(A.50) $$X_r = \frac{48\,\rho\,\mu^2\,L\,n'^2_s}{g\,\pi\,\delta\,D_r}\cdot k_{x\mu}$$

$k_{r\mu}$ et $k_{x\mu}$ étant justement les coefficients "correcteurs de courbure" donnés selon la polarité (l'indice μ prenant la valeur 1 ou 2) par les relations (A.43) à (A.46) que nous reproduisons ici :

(A.43) $$k_{r_1} = \frac{sh\,(D_r/4\delta) + \sin\,(D_r/4\delta)}{ch\,(D_r/4\delta) - \cos\,(D_r/4\delta)}$$

(A.44) $$k_{x_1} = \frac{sh\,(D_r/2\delta) - \sin\,(D_r/2\delta)}{ch\,(D_r/2\delta) - \cos\,(D_r/2\delta)}$$

(A.45)
$$k_{r2} = \frac{sh\,(D_r/6\delta) + \sin\,(D_r/6\delta)}{ch\,(D_r/6\delta) - \cos\,(D_r/6\delta)}$$

(A.46)
$$k_{x2} = \frac{sh\,(3D_r/8\delta) - \sin\,(3D_r/8\delta)}{ch\,(3D_r/8\delta) - \cos\,(3D_r/8\delta)}$$

A.1.2 - Autres cas d'application des formules :

Nous souhaitons appliquer ces formules au cas d'un rotor non plein, mais comportant des zones plus ou moins profondément encochées.

On est donc amené à envisager l'adaptation de ces formules à des zones en forme de secteur cylindrique (zones b et d , fig.10), et, du fait de l'anisotropie du rotor, à les appliquer à la décomposition selon deux axes.

Ces différentes modalités ne présentent aucune difficulté, du moins dans le cadre de nos hypothèses sur le raccordement des différentes zones.

Cet aménagement concernera surtout les termes R_r et X_r .

En régime asynchrone, il leur est associé les puissances dissipées au rotor, c'est-à-dire ramenées à la pulsation $\omega_o g$ du rotor :

active : $P_r = 3g\,R_r\,I_r^2$ réactive : $Q_r = 3g\,X_r\,I_r^2$

qui s'écrivent plus simplement sous la forme suivante, tirée des équations (A.5), (A.13), (A.47) et (A.48)

$$P_r = \frac{\pi \rho L D_r k_{rfp} |H_\theta|^2}{\delta}$$

$$Q_r = \frac{\pi \rho L D_r k_{xfp} |H_\theta|^2}{\delta}$$

dans lesquelles H_θ désigne la composante tangentielle du champ appliqué à la surface du rotor.

Il est alors extrêmement facile de transposer ces formules au cas où on ne considère qu'un secteur cylindrique d'angle élémentaire $d\theta$, correspondant en pratique à un pas dentaire de zone bobinée ou de zone polaire .

On doit d'abord multiplier les expressions de P_ν et Q_ν par $d\theta/2\pi$.

On doit donner à D_ν les valeurs correspondant aux zones b ou d de la fig. 10 ; cette substitution doit concerner aussi les coefficients $k_{r\nu}$ et $k_{x\nu}$.

Enfin il faut considérer que le champ H_θ désigne alors le champ tangentiel appliqué à la surface cylindrique limitant le secteur élémentaire considéré.

De la sorte les formules établies pour un rotor cylindrique homogène permettent de compléter le calcul de l'impédance de fuites associée à un pas dentaire.

Les autres particularités de mise en oeuvre, notamment le raccordement des zones entre elles et le passage aux valeurs réduites, est traité dans la 1ère partie de ce document.

A.2. INTRODUCTION.

A.2.1 - But de l'étude.

Cette étude a pour objet d'apporter une contribution à la prise en compte du fer massif existant au rotor d'un certain nombre de machines tournantes, et notamment des turboalternateurs.

Cette prise en compte nécessite la résolution des équations de MAXWELL, dont on sait qu'elle est beaucoup plus compliquée dans un volume limité par une surface cylindrique que par une surface plane.

On se propose de rechercher un coefficient correcteur, d'expression analytique assez simple, qui devra être appliqué à la solution obtenue dans l'hypothèse plane, de façon à rendre compte de l'influence de la courbure.

On tiendra compte également de la présence du stator et de l'entrefer, de façon à traduire les résultats obtenus à l'aide du "schéma équivalent" classique.

La validité des formules obtenues sera évaluée par comparaison avec un calcul complet effectué à l'ordinateur avec utilisation des fonctions de Bessel.

A.2.2 - Hypothèses principales.

Le rotor est supposé cylindrique et homogène, de perméabilité relative μ constante et supposée grande devant l'unité. Cette hypothèse ne se trouve pas respectée dans les turboalternateurs, où le fer massif est séparé de l'entrefer par des encoches et des dents. Cependant, lorsqu'on voudra appliquer la présente méthode aux turboalternateurs, on pourra admettre que le "coefficient de correction de courbure" s'applique aux régions du fer massif situées sous les encoches.

On ne tient pas compte ici des effets d'extrémités ; on suppose donc que les différentes grandeurs électromagnétiques sont indépendantes de la coordonnée z parallèle à l'axe du cylindre.

Conformément aux explications du § 2231, on suppose connues la résistance R_s et la réactance des fuites X_s du stator, cette dernière étant cependant limitée à la prise en compte des fuites d'encoche et des fuites de têtes de bobines.

Enfin la machine est supposée triphasée et le développement des calculs sera limité au cas bipolaire ($p=1$) et quadripolaire ($p=2$).

A.2.3 - Méthode de calcul.

Le calcul est basé sur la résolution des équations de Maxwell, dans l'entrefer et dans le rotor, et dans le système de coordonnées cylindriques r, θ, z . La loi de variation avec le temps correspond au fonctionnement asynchrone en régime établi. Les lois de variation au cours du temps sont alors des lois sinusoïdales, ce qui permet l'utilisation des nombres complexes. L'isotropie de la machine permet d'affirmer que les lois de variations en fonction de l'angle θ et du temps t sont entièrement traduites par l'opérateur de rotation

$e^{j(p\theta + \omega_0 t)}$ dans le référentiel lié au stator

$e^{j(p\theta + \omega_0 g t)}$ dans le référentiel lié au rotor

La solution des équations de Maxwell conduit alors à la connaissance des nombres complexes A_z, B_r, B_θ, H_r, H_θ, J_z traduisant les composantes du potentiel vecteur, de l'induction magnétique, du champ magnétique et de la densité de courant. Pour en déduire les éléments du schéma équivalent, on aura recours au calcul des puissances actives et réactives.

La puissance active P dissipée dans un volume V se calcule par l'intégrale

$$P = \iiint_V \rho \left| J_z \right|^2 dz$$

On obtiendra la puissance réactive de manière analogue, en se basant sur la remarque que la puissance réactive dissipée dans une inductance L à

la pulsation ω vaut $L\omega I^2$, mais que la même inductance s'obtient en calculant l'énergie magnétique emmagasinée $\frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} . \vec{H} . d\nu$

d'où, à la pulsation ω :

$$Q = \omega \iiint_V \vec{B} . \vec{H} . d\nu$$

soit, en utilisant les nombres complexes :

$$Q = \omega \iiint_V \left(B_r H_r^* + B_\theta H_\theta^* \right) d\nu$$

le signe * signifiant "imaginaire conjugué".

On remarque que, dans le calcul de P et Q , l'opérateur de rotation s'élimine.

Il sera par ailleurs possible d'exprimer ces mêmes puissances en fonction des courants figurant sur les schémas équivalents, d'où les impédances.

On obtiendra ainsi le schéma équivalent et la transmittance totale sous forme "harmonique" pour toute valeur de q , et on sait qu'il est possible d'en déduire le comportement de la machine pour d'autres régimes correspondant à des lois de variation quelconques au cours du temps.

A.3. RESOLUTION DU CHAMP DANS L'ENTREFER.

Dans l'entrefer le potentiel vecteur obéit à la loi :

$$\overrightarrow{\nabla^2 A} = 0$$

soit ici où seule existe la composante A_z sous forme complexe :

(A.1) $$\nabla^2 A_z = 0$$

Dès maintenant on est obligé de distinguer les cas $p = 1$ et $p = 2$.

A.3.1 - Machine bipolaire ($p = 1$)

A_z ne dépend par hypothèse que de r et θ , et on connaît bien dans ce cas la solution classique de (A.1) :

$$A_z = \left(Ar + \frac{B}{r} \right) e^{j(\theta + \omega_0 t)}$$

A et B étant des constantes complexes, et d'où il vient, puisque

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot\ A} \qquad \text{et} \qquad \vec{B} = \mu_o \vec{H}$$

(A.2) $$B_r = j\left(A + \frac{B}{r^2}\right) e^{j(\theta + \omega_o t)} = \mu_o H_r$$

(A.3) $$B_\theta = \left(-A + \frac{B}{r^2}\right) e^{j(\theta + \omega_o t)} = \mu_o H_\theta$$

Les constantes A et B sont déterminées par les considérations suivantes :

Classiquement, une fois prise en compte la réactance de fuites stator X_s, l'influence du stator vis-à-vis de l'entrefer et du rotor peut être identifiée à celle d'une couche de courant, de densité superficielle égale à la densité linéique de courant stator, et derrière laquelle se trouve un matériau de grande perméabilité. En application du théorème d'Ampère cette densité superficielle de courant est donc égale au champ tangentiel au niveau du rayon stator $H_{\theta s}$ d'où :

(A.4) $$H_{\theta s} = \frac{1}{\mu_o}\left(-A + \frac{4B}{D_s^2}\right) e^{j(\theta + \omega_o t)} = \frac{12\, n'_s\, I_s}{\pi D_s}\, e^{j(\theta + \omega_o t)}$$

La justification du coefficient intervenant au dernier membre des équations (A.4), (A.5), (A.12) et (A.13) est exposée au § 4.4.2.2.

Nous admettrons qu'une expression analogue est approximativement vérifiée au niveau du rayon rotor, soit le champ tangentiel

(A.5) $$H_{\theta r} = \frac{1}{\mu_o}\left(-A + \frac{4B}{D_r^2}\right) e^{j(\theta + \omega_o t)} \# \frac{12\, n'_s\, I_r}{\pi D_r}\, e^{j(\theta + \omega_o t)}$$

Dans cette expression, I_r représente le courant total circulant dans le rotor, ramené au nombre de spires du stator ; c'est le courant qui figure dans la branche rotorique du schéma équivalent.

Cette expression résulte d'une application non rigoureuse du théorème d'Ampère, puisque celui-ci doit s'appliquer à un contour fermé, comportant d'une part la moitié de la circonférence du rotor (ce qui correspond bien à l'expression (A.5)), mais aussi la fermeture de ce contour par un diamètre. Le long de ce diamètre existe le champ radial dans le rotor (champ magnétisant) que nous admettrons être faible dans la mesure où la perméabilité est élevée. L'expression (A.5) néglige en fait la circulation de ce champ radial le long du diamètre fermant le contour. Dans les applications numériques données à la fin de cette annexe on pourra juger de la validité de cette hypothèse.

Les relations (A.4) et (A.5) fournissant les constantes d'intégration A et B en fonction des courants I_s et I_r.

La puissance réactive dissipée dans l'entrefer s'écrit alors :

$$Q_e = \omega_o \int_o^L dz \int_o^{2\pi} d\theta \int_{\frac{D_r}{2}}^{\frac{D_s}{2}} \left(B_r H_r^* + B_\theta H_\theta^* \right) r \, dr$$

$$Q_e = \omega_o \, 2\pi L \int_{\frac{D_r}{2}}^{\frac{D_s}{2}} \left(B_r H_r^* + B_\theta H_\theta^* \right) r \, dr$$

soit, tout d'abord, en fonction de A et B, et en poussant jusqu'au degré 2 en ε, ε étant le quotient de l'entrefer au rayon rotor $\varepsilon = \frac{2e}{D_r}$

(A.6)
$$Q_e = \frac{2\pi \omega_o L}{\mu_o} \left[\frac{|A|^2 D_r^2 (2\varepsilon + \varepsilon^2)}{4} + \frac{4|B|^2 (2\varepsilon + \varepsilon^2)}{D_r^2 (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2)} \right]$$

Lorsqu'on remplace alors A et B en fonction de I_s et I_r, utilisant (A.4) et (A.5), et qu'on porte dans (A.6), on voit apparaître, en plus de termes en $|I_s|^2$ et $|I_r|^2$, des termes en $I_s I_r^* + I_r I_s^*$, qu'on élimine en introduisant le courant magnétisant :

$$I_m = I_s - I_r ,$$

car en prenant le carré des modules il vient :

$$I_s I_r^* + I_r I_s^* = |I_s|^2 + |I_r|^2 - |I_m|^2$$

Il vient en définitive :

(A.7)
$$\boxed{Q_{e(\mu=1)} = \frac{72 \, \omega_o L \mu_o n_s'^2}{\pi \varepsilon} \left[\frac{\varepsilon^2}{2} |I_s|^2 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4} \right) |I_m|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} |I_r|^2 \right]}$$

Cette expression extrêmement intéressante montre que la puissance réactive dissipée dans l'entrefer se compose de 3 termes, proportionnels respectivement au carré du courant stator, du courant magnétisant et du courant rotor, et qu'en conséquence la partie "entrefer" du schéma équivalent se présente conformément à la fig. A.1.

Sur ce schéma, la réactance X_{me} est la classique réactance de magnétisation limitée à l'entrefer seul, que l'on peut mettre en évidence d'après (A.7) en faisant $I_r = 0$, d'où $I_s = I_m$, et en divisant par $3 I_m^2$.

On a donc :

(A.8)
$$X_{me(f=1)} = \frac{24 \mu_o \omega_o L n_s'^2}{\pi \varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right)$$

expression classique,

et par ailleurs de (A.7) et (A.8) on tire l'expression de X_{se}

$$X_{se(f=1)} = \frac{\varepsilon^2}{2} X_{me}$$

Le résultat que nous venons d'obtenir est tout à fait général pour toutes les machines tournantes, et montre que dans les réactances communément appelées "de fuites stator" et "de fuites rotor" il existe un terme complètement indépendant de l'existence et des dimensions des encoches, et simplement lié au fait que lorsqu'une machine "travaille", la distorsion du champ qui en résulte entraîne une variation de la puissance réactive d'entrefer.

A.3.2 - Machine quadripolaire (p = 2)

Les raisonnements sont identiquement les mêmes, seule la forme des expressions est modifiée. Nous donnons donc uniquement les modifications par rapport au paragraphe précédent.

A_z s'écrit maintenant :

$$A_z = \left(Ar^2 + \frac{B}{r^2}\right) e^{j(2\theta + \omega_o t)}$$

A et B étant de nouvelles constantes complexes.

(A.2) et (A.3) deviennent :

(A.10)
$$B_r = 2j\left(Ar + \frac{B}{r^3}\right) e^{j(2\theta + \omega_o t)} = \mu_o H_r$$

(A.11)
$$B_\theta = 2\left(-Ar + \frac{B}{r^3}\right) e^{j(2\theta + \omega_o t)} = \mu_o H_\theta$$

(A.4) et (A.5) deviennent :

$$H_{\theta s} = \frac{2}{\mu_o}\left(-\frac{A D_s}{2} + \frac{8B}{D_s^3}\right) e^{j(2\theta+\omega_o t)} = \frac{24\, n'_s\, I_s}{\pi D_s}\, e^{j(2\theta+\omega_o t)} \tag{A.12}$$

$$H_{\theta r} = \frac{2}{\mu_o}\left(-\frac{A D_r}{2} + \frac{8B}{D_r^3}\right) e^{j(2\theta+\omega_o t)} = \frac{24\, n'_s\, I_r}{\pi D_r}\, e^{j(2\theta+\omega_o t)} \tag{A.13}$$

(A.6) devient :

$$Q_e = \frac{16\pi\omega_o L}{\mu_o}\left[\frac{|A|^2 D_r^4\,\varepsilon}{16}\left(1+\frac{3\varepsilon}{2}\right) + \frac{16\,|B|^2\,\varepsilon}{D_r^4}\left(1-\frac{5\varepsilon}{2}\right)\right] \tag{A.14}$$

et (A.7) devient :

$$\boxed{Q_{e(\mu=2)} = \frac{72\,\omega_o L\,\mu_o\, n'^2_s}{\pi\varepsilon}\left[2\varepsilon^2\,|I_s|^2 + \left(1+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{3\varepsilon^2}{4}\right)|I_m|^2 + 2\varepsilon^2\,|I_r|^2\right]} \tag{A.15}$$

D'où les mêmes conclusions qu'au paragraphe précédent :

La partie "entrefer" du schéma équivalent se présente conformément à la fig. A.1 avec

$$X_{me(\mu=2)} = \frac{24\,\mu_o\,\omega_o L\, n'^2_s}{\pi\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{5\varepsilon^2}{4}\right) \tag{A.16}$$

et

$$X_{se(\mu=2)} = 2\varepsilon^2 X_{me} \tag{A.17}$$

A.4. RESOLUTION DU CHAMP DANS LE ROTOR.

A.4.1 - Mise en équations et forme générale de la solution.

Supposons que le fer a une perméabilité relative constante μ d'où :

$$\vec{B} = \mu_o \mu \vec{H}$$

et une résistivité ρ d'où :

$$\vec{E} = \rho \vec{J}$$

Nous utiliserons les trois équations de Maxwell

(A.18)
$$\overrightarrow{rot\ H} = \vec{J}$$

$$div.\ \vec{B} = 0$$

qui s'écrit ici :

(A.19)
$$div\ \vec{H} = 0$$

et

$$\overrightarrow{rot\ E} = -\frac{\overrightarrow{\partial B}}{\partial t}$$

qui s'écrit ici

(A.20)
$$\overrightarrow{rot\ J} = -\frac{\mu_o \mu}{\rho} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Conformément à nos hypothèses de départ, H et J se réduisent à leurs composantes H_r, H_θ et J_z, exprimées sous forme de nombres complexes puisque le régime est sinusoïdal.

Dans ce paragraphe nous nous plaçons dans un référentiel lié au rotor, si bien que la pulsation est $g\omega_o$.

Dans ces conditions les équations (A.18), (A.19) et (A.20) donnent lieu classiquement aux quatre équations :

(A.21)
$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r H_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} = J_z$$

(A.22)
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} = 0$$

(A.23) $$\frac{1}{r}\frac{\partial J_z}{\partial \theta} = -\beta^2 H_r$$

(A.24) $$\frac{\partial J_z}{\partial r} = \beta^2 H_\theta$$

avec :

(A.25) $$\beta^2 = \frac{j\omega_0 g \mu_0 \mu}{\rho} \qquad \beta = \frac{1+j}{\delta} \qquad \delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega_0 g \mu_0 \mu}}$$

δ est la classique "profondeur de pénétration".

On sait également que la méthode classique de résolution consiste à rechercher pour H_r et H_θ des solutions de la forme :

(A.26) $$rH_r = f(r)\, e^{j(n\theta + \omega_0 g t)}$$

(A.27) $$H_\theta = g(r)\, j e^{j(n\theta + \omega_0 g t)}$$

$f(r)$ et $g(r)$ étant des fonctions complexes de r et en reportant dans les équations (A.21) à (A.24) il vient :

(A.28) $$f'(r) - n\, g(r) = 0$$

(A.29) $$f''(r) + \frac{f'(r)}{r} + \left(\beta^2 + \frac{n^2}{r^2}\right) f(r) = 0$$

(A.30) $$J_z = \frac{\beta^2}{n} f(r)\, j e^{j(n\theta + g\omega_0 t)}$$

Les fonctions $f(r)$ et $g(r)$ sont en toute rigueur exprimées à l'aide de fonctions de Bessel [13]. Mais, conformément à notre propos initial nous allons chercher des expressions simplifiées, en nous basant sur des considérations asymptotiques.

A.4.2 - Solution asymptotique pour les glissements élevés.

Lorsque le glissement est élevé, $|\beta D_r| \gg 1$, autrement dit la profondeur de pénétration est faible devant le rayon. La solution asymptotique correspond à la solution plane classique, ce qui entraîne :

$$f(r) = A \exp\left[-\beta(D_r/2 - r)\right]$$

$$g(r) = (A\beta/jp)\exp\left[-\beta(D_r/2 - r)\right]$$

A étant une constante complexe.

On s'aperçoit alors que H_r est énergétiquement négligeable, ce qui justifie, dans ce domaine de glissements, les expressions approchées de $H_{\theta r}$ données en (A.5) et (A.13). La constante A s'explicite en écrivant que H_θ doit être égale à $H_{\theta r}$ pour $r = \frac{D_r}{2}$, ce qui donne, en appelant $H'_{\theta r}$ les quantités données par (A.5) ou (A.13) privées de l'opérateur de rotation :

$$H_r \neq 0$$

$$H_\theta = H'_{\theta r} \exp\left[-\beta(D_r/2 - r) + j(p\theta + \omega_0 g t)\right]$$

$$J_z = \beta H'_{\theta r} \exp\left[-\beta(D_r/2 - r) + j(p\theta + \omega_0 g t)\right]$$

et nous calculons la puissance active totale P_r et réactive totale Q_r dans le rotor par la méthode exposée au § A.2.3. ; comme la profondeur de pénétration est faible nous supposons que l'élément de volume est toujours $\frac{D_r}{2} L\, dr\, d\theta$, c'est-à-dire indépendant de la profondeur. Dans le calcul de Q_r nous devons prendre comme pulsation $\omega_0 g$; de la sorte P_r et Q_r sont les puissances actives et réactives dissipées au rotor (Vues du stator ces puissances sont respectivement $\frac{P_r}{g}$ et $\frac{Q_r}{g}$).

Il vient alors, compte tenu de (A.5), (A.13) et (A.25)

(A.31)
$$\boxed{P_{r(g\ élevé)} = \frac{\pi \rho L D_r}{\delta} \left| \frac{12\, p\, n'_s\, I_r}{\pi D_r} \right|^2}$$

(A.32)
$$\boxed{Q_{r(g\ élevé)} = \frac{\pi \rho L D_r}{\delta} \left| \frac{12\, p\, n'_s\, I_r}{\pi D_r} \right|^2}$$

Ces expressions nous permettront au § A.5 d'expliciter la résistance et la réactance du rotor.

A.4.3 - Solution asymptotique pour les glissements faibles en bipolaire ($p=1$)

Lorsque le glissement est faible $|\beta D_r| \ll 1$ donc $|\beta r| \ll 1$.

La solution de (A.28) et (A.29), donc les expressions de H_r, H_θ et J_z, peuvent s'exprimer à l'aide de développements limités en r.

Il vient dans le cas où $p = 1$

$$H_r = A\left(1 + \frac{\beta^2 r^2}{8} + \frac{\beta^4 r^4}{192} + \cdots\right) \exp\left[j(\theta + \omega_0 g t)\right]$$

$$H_\theta = A\left(1 + \frac{3\beta^2 r^2}{8} + \frac{5\beta^4 r^4}{192} + \cdots\right) j \exp\left[j(\theta + \omega_0 g t)\right]$$

$$J_z = A\left(\beta^2 r + \frac{\beta^4 r^3}{8} + \cdots\right) j \exp\left[j(\theta + \omega_0 g t)\right]$$

A étant une constante complexe qui peut être explicitée par les conditions aux limites.

Ces expressions permettent alors de calculer la puissance active et réactive.

On constate cependant que les expressions de H_r et de H_θ font apparaître deux éléments de natures distinctes :

- un terme irrotationnel, représenté par le 1er terme des développements limités, et qui correspond au champ magnétisant dans le fer. Ce terme ne correspond pas à un courant réellement dissipé dans le fer mais doit être pris en compte, dans les schémas équivalents, sous forme d'une réactance magnétisante ;

- les autres termes dont $\vec{J}$ est bien le rotationnel, et qui correspondent à la réactance associée aux courants rotoriques.

Les calculs relatifs à cette séparation sont assez longs.

Donnons-en seulement les résultats.

Le courant rotorique I_r des schémas équivalents doit être séparé en courant magnétisant I_{mr} et courant de travail I_{tr}.

(A.33) $$I_r = I_{mr} + I_{tr}$$

au courant I_{mr} correspond la puissance réactive Q_{mr} dissipée dans la réactance de magnétisation X_{mr} du rotor.

Cette réactance a pour valeur :

(A.34) $$X_{mr\,(p=1)} = \frac{24\,\mu_0\,\mu\,\omega_0\,n_s'^2\,L}{\pi}$$

Les puissances active P_r et réactive Q_r propres au courant de travail I_{tr} ont pour expression (en se limitant au premier terme des développements limités), vues du rotor :

(A.35) $$P_{r\,(p=1,\ g\ faible)} = 8\pi\rho L \left| \frac{12\,n_s'\,I_{tr}}{\pi D_r} \right|^2$$

(A.36) $$Q_{r\,(p=1,\ g\ faible)} = \frac{\pi\rho L D_r^2}{6\delta^2} \left| \frac{12\,n_s'\,I_{tr}}{\pi D_r} \right|^2$$

A.4.4 - Solution asymptotique pour les glissements faibles en quadripolaire (p = 2)

De même qu'au paragraphe précédent, on résout les équations (A.28) et (A.29), à l'aide de développements limités en r, d'où les expressions de H_r, H_θ, et J_z qui s'écrivent, dans le cas où $p = 2$:

$$H_r = Br\left(1 + \frac{\beta^2 r^2}{12} + \frac{\beta^4 r^4}{384} + \cdots\right) \exp\left[j(2\theta + \omega_0 g t)\right]$$

$$H_\theta = Br\left(1 + \frac{\beta^2 r^2}{6} + \frac{\beta^4 r^4}{128} + \cdots\right) j \exp\left[j(2\theta + \omega_0 g t)\right]$$

$$J_z = B\left(\frac{\beta^2 r^2}{2} + \frac{\beta^4 r^4}{24} + \cdots\right) j \exp\left[j(2\theta + \omega_0 g t)\right]$$

B étant une constante d'intégration complexe.

De même qu'au paragraphe précédent, on doit tenir compte à part, dans les expressions du champ, du premier terme, irrotationnel, correspondant au champ magnétisant.

Donc, ici encore, le courant rotorique doit être décomposé en deux conformément à (A.33) ; au courant I_{mr} correspond la puissance réactive Q_{mr} dissipée dans la réactance de magnétisation X_{mr} du rotor. Cette réactance a pour valeur :

(A.37) $$X_{mr\,(p=2)} = \frac{48\,\mu_0\,\mu\,\omega_0\,n_s'^2\,L}{\pi}$$

Les puissances active P_r et réactive Q_r propres au courant de travail I_{tr} ont pour expression, vues du rotor :

(A.38) $$P_r(p=2, g \text{ faible}) = 12\pi\rho L \left| \frac{24 n'_s I_{tr}}{\pi D_r} \right|^2$$

(A.39) $$Q_r(p=2, g \text{ faible}) = \frac{\pi\rho L D_r^2}{8\delta^2} \left| \frac{24 n'_s I_{tr}}{\pi D_r} \right|^2$$

A.5. CHOIX DES COEFFICIENTS DE CORRECTION DE COURBURE ET SCHEMA EQUIVALENT.

A.5.1 - Problème posé par la magnétisation du rotor et structure du schéma équivalent.

Nous avons établi, au § A.4., des expressions asymptotiques pour les puissances actives et réactives rotoriques aux glissements élevés (sous-§ A.4.2.) et aux glissements faibles (sous-§ A.4.3. et A.4.4.) et notre propos est de trouver des expressions approchées, respectant ces diverses valeurs asymptotiques, et applicables quel que soit le glissement.

Une première difficulté vient du fait qu'aux glissements élevés la puissance magnétisante du rotor a été négligée, du fait qu'elle est très faible et qu'au demeurant le rotor n'est que partiellement magnétisé, alors qu'aux glissements faibles il s'est avéré nécessaire de la calculer à part. Le courant magnétisant et le courant de travail dans les schémas équivalents des machines mettant en oeuvre des matériaux massifs est bien connue (cf. théorie du moteur linéaire, Bibl. [15]) ; mais ici, le fait que le rotor a une perméabilité élevée nous fournit une solution entraînant une erreur faible. On adopte dans une première étape le schéma équivalent de la fig. A.2, qui complète celui de la fig. A.1.

La réactance magnétisante du rotor X_{mr} est bien prise en compte aux glissements faibles ; mais comme cette réactance est grande d'une part vis-à-vis de X_{me} et d'autre part, lorsque le glissement est élevé, vis-à-vis de l'impédance rotor, sa présence indue aux glissements élevés entraînera une erreur faible, et d'autant plus faible que μ est plus élevé.

En outre, le fait que $X_{mr} \gg X_{se}$ (on pourrait vérifier qu'on a sensiblement $\frac{X_{se}}{X_{mr}} = \frac{p\varepsilon}{2\mu}$) permet de simplifier le schéma équivalent de la fig. A.2. en venant mettre X_{mr} en parallèle avec $(X_{me} - X_{se})$, d'où le schéma équivalent de la fig. A.3, dans lequel X_m est la réactance de magnétisation usuelle, incluant le fer du rotor, et qui s'écrit :

(A.40)
$$X_{m(\mu=1)} = \frac{24\,\mu_0\,\omega_0\,L\,n_s'^2}{\pi\,\varepsilon\left(1-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{\mu\,\varepsilon}\right)}$$

(A.41)
$$X_{m(\mu=2)} = \frac{24\,\mu_0\,\omega_0\,L\,n_s'^2}{\pi\,\varepsilon\left(1-\frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon^2+\frac{1}{2\mu\,\varepsilon}\right)}$$

Il faut remarquer que, sur le plan du principe, la fig. A.3 se distingue de la fig. A.2 par le fait qu'il n'y a plus séparation du courant magnétisant de l'entrefer et du rotor ; tout se passe comme si on avait affecté à l'entrefer la magnétisation du rotor.

La distinction entre I_r et I_{tr} n'ayant maintenant plus de raison d'être, on peut remplacer I_{tr} par I_r dans (A.35), (A.36), (A.30) et (A.39), et alors procéder à la recherche de la synthèse entre ces formules et les formules (A.31) et (A.32), afin d'expliciter l'impédance de travail du rotor $R_r + jX_r$.

Les expressions (A.31) et (A.32) sont prises comme référence, ce qui signifie que dans les applications on commencera toujours par exprimer les puissances active et réactive comme en l'absence de courbure, ou ce qui revient au même en supposant le glissement élevé.

Dans le cas présent d'une machine isotrope, il vient donc (en divisant P_r et Q_r par $3g\,I_r^2$, la division par g résultant du fait que le schéma équivalent est vu du stator).

(A.42)
$$R_{r(g\ \text{élevé})} = X_{r(g\ \text{élevé})} = \frac{48\,\rho\,\mu^2\,L\,n_s'^2}{g\,\pi\,\delta\,D_r}$$

résultat classique lorsqu'on néglige la courbure : la résistance et la réactance sont égales, et pour g grand elles varient comme $g^{-1/2}$ donc tendent toutes deux vers zéro pour g tendant vers l'infini ; c'est surtout dans cette circonstance qu'il importe de tenir compte de X_{se}.

A.5.2 - Coefficients de correction de courbure en bipolaire ($p=1$)

Nous cherchons un coefficient multiplicateur k_{r1} qui, affecté à P_r donné par la formule (A.31), lui conserve sa valeur pour g élevé mais le fasse tendre vers (A.35) (avec I_{tr} remplacé par I_r) pour g faible. Ce coefficient, appelé coefficient correcteur de courbure, pourra aussi bien être affecté à R_r donné en (A.42), produisant le même résultat. On voit facilement qu'aux glissements élevés k_{r1} doit être égal à 1, alors qu'aux glissements faibles il doit tendre vers $\frac{8\delta}{D_r}$. Le terme correcteur a été choisi en s'inspirant de la théorie du moteur asynchrone à encoches profondes, soit :

(A.43)
$$k_{r1} = \frac{sh(D_r/4\delta) + \sin(D_r/4\delta)}{ch(D_r/4\delta) - \cos(D_r/4\delta)}$$

Alors, en remplaçant P_r donné par (A.31) (avec $p = 1$) par $k_{r1} P_r$, ou R_r donné par (A.42) (avec $p=1$) par $k_{r1} R_r$, on obtient une expression approchée valable pour tous les glissements.

De la même manière on cherche le coefficient k_{x1} qui multipliant Q_r donné par (A.32) (avec $p=1$) ou X_r donné par (A.42) (avec $p=1$) donne une expression approchée valable pour tous les glissements. Pour g élevé k_{x1} doit être égal à 1 et aux glissements faibles, comparant (A.32) et (A.36), on voit que k_{x1} doit tendre vers $\frac{D_r}{6\delta}$ d'où le choix de k_{x1} :

(A.44)
$$k_{x1} = \frac{sh(D_r/2\delta) - \sin(D_r/2\delta)}{ch(D_r/2\delta) - \cos(D_r/2\delta)}$$

A.5.3 - Coefficients de correction de courbure en quadripolaire ($p=2$)

Par le même procédé, on détermine l'expression du coefficient k_{r2} multipliant P_r donné par (A.31) (avec $p=2$) ou R_r donné par (A.42) (avec $p=2$). Compte tenu de (A.38) on a choisi :

(A.46)
$$k_{r2} = \frac{sh(D_r/6\delta) + \sin(D_r/6\delta)}{ch(D_r/6\delta) - \cos(D_r/6\delta)}$$

et enfin on détermine l'expression du coefficient k_{x2} multipliant Q_r donné par (A.32) (avec $p = 2$) ou X_r donné par (A.42) (avec $p = 2$). Compte tenu de (A.39) on a choisi :

(A.46)
$$k_{x2} = \frac{sh(3D_r/8\delta) - \sin(3D_r/8\delta)}{ch(3D_r/8\delta) - \cos(3D_r/8\delta)}$$

A.5.4.- Expression générale des puissances et des impédances relatives au rotor.

Si l'on considère seulement la branche située à droite au point B, fig. A.3, elle est en définitive caractérisée, en régime asynchrone :

- soit par la puissance active P_r et réactive Q_r vues du rotor, données par (A.31 et A.32), mais corrigées par les coefficients k donnés par (A.43) à (A.46) que l'on appellera k_{rp} et k_{xp}, p pouvant prendre la valeur 1 ou 2, soit :

(A.47)
$$P_r = \frac{\pi \rho L D_r k_{rp}}{\delta} \left| \frac{12 p n'_s I_r}{\pi D_r} \right|^2$$

(A.48)
$$Q_r = \frac{\pi \rho L D_r k_{xp}}{\delta} \left| \frac{12 p n'_s I_r}{\pi D_r} \right|^2$$

- soit par la résistance R_r et la réactance X_r , données par (A.42) mais corrigées par les mêmes coefficients k soit

(A.49)
$$R_r = \frac{48 \rho p^2 L n'^2_s}{g \pi \delta D_r} \cdot k_{rp}$$

(A.50)
$$X_r = \frac{48 \rho p^2 L n'^2_s}{g \pi \delta D_r} \cdot k_{xp}$$

A.6. VERIFICATION NUMERIQUE.

Afin de juger de la validité des formules simplifiées adoptées pour la prise en compte de la courbure, on a comparé les résultats numériques obtenus à l'aide du schéma équivalent de la fig. A.3., faisant intervenir les formules (A.9), (A.17) et (A.40) à (A.46), avec les résultats obtenus par résolution rigoureuse des équations de Bessel, sur deux machines supposées à rotor cylindrique entièrement massif, l'une bipolaire et l'autre quadripolaire. Le fonctionnement choisi est le fonctionnement asynchrone (c'est également ce fonctionnement qui a été choisi pour la partie théorique de cette annexe) et la comparaison porte sur les valeurs et les variations des différentes grandeurs en fonction du glissement.

Pour rendre la comparaison plus significative, on a négligé l'impédance statorique $R_s + j X_s$ (fig. A.3). En ce qui concerne le modèle rigoureux, basé sur l'utilisation des fonctions de Bessel, cela revient à assimiler l'enroulement stator à une couche de courant d'épaisseur infiniment mince, disposée à la périphérie extérieure de l'entrefer, et à supposer que cette couche de courant s'appuie sur un milieu de perméabilité magnétique infinie et de conductivité électrique nulle.

En ce qui concerne le modèle simplifié, cela revient à supposer la tension V_1 appliquée au point A de la fig. A.3.

A.6.1 - Paramètres géométriques.

On a choisi pour la machine des dimensions correspondant approximativement à celles d'un turbo-alternateur de 600 MW.

Ces dimensions sont rassemblées dans le tableau suivant (les valeurs sont différentes pour $p = 1$ et $p = 2$).

TABLEAU A.1

p	1	2
Rayon rotor R_r (m)	0,5825	0,825
Longueur (m)	6,2	6,2
Entrefer (m)	0,1	0,0707
n'_s	4 x 0,905	3 x 0,905

En outre la résistivité du fer a été prise égale à $\rho = 25.10^{-8}\ \Omega.m$. et on a fait varier la perméabilité relative μ du fer entre 20 et 200.

Enfin, dans le but d'exprimer les résultats (puissances et impédances) en valeur réduite, on a fixé la tension nominale U_n à 20 kV et la puissance apparente nominale S_n à 666 MVA.

A.6.2 - Résultats de la comparaison.

Il n'a pas paru commode, dans le cas présent, de traduire les résultats du calcul par des courbes. En effet, pour observer commodément l'évolution des phénomènes sous l'influence de la courbure, il est nécessaire d'explorer un certain nombre de décades aussi bien pour le glissement que pour les diverses puissances. Alors, du fait que les valeurs numériques trouvées par les deux méthodes sont assez proches, les courbes relatives à l'une et l'autre méthodes ne se distingueraient pratiquement pas sur le graphique.

On a donc préféré présenter les résultats sous la forme des 6 tableaux suivants :

Les 3 premiers sont relatifs à $p=1$, pour μ = 20, 50 et 200 ; les 3 derniers sont relatifs à $p=2$ pour μ = 20, 50 et 200.

Dans chaque tableau, pour g variant de 5.10^{-6} à 0,33, on a porté (en valeur relative, c'est-à-dire divisées par S_n) et vues du stator, c'est-à-dire en ce qui concerne p_r et q_r, divisées par g:

- la puissance active p_r (compte tenu du modèle adopté, la puissance active totale est due uniquement à la présence de R_r , ou encore du rotor massif) ;

- la puissance réactive totale q

- la puissance réactive dissipée dans le rotor seul q_r ,

Il a paru intéressant de faire figurer cette dernière puissance réactive dans la comparaison, car aux glissements faibles q ne rend pas compte de la loi asymptotique, à cause de la prépondérance de la puissance magnétisante. q_r au contraire rend compte du flux de fuites propre au rotor. Par la méthode simplifiée c'est la puissance réactive dissipée à droite de B (fig.A.3) Par la méthode avec les fonctions de Bessel, c'est la différence entre la puissance réactive q et la limite de q pour $g=0$ (soit $q_r = q - q_0$). Cette dernière définition était nécessaire pour rendre la comparaison possible aux glissements faibles, puisque le principe de la méthode simplifiée consiste à dissocier, dans le schéma équivalent, ce qui est dû au courant magnétisant et ce qui est dû au courant de travail (ou encore dissociation de I_m et I_r , fig.A.3). D'autre part c'est bien p_r qui correspond à P_r donnée par (A.47) et q_r qui correspond à Q_r donné par (A.48).

TABLEAU A.2 ($p=1$, $\mu=20$)

g	p_r		q		q_r	
	Méthode simplifiée	Bessel	Méthode simplifiée	Bessel	Méthode simplifiée	Bessel
$5\ 10^{-6}$	$1,582\ 10^{-3}$	$1,575\ 10^{-3}$	$5,041\ 10^{-1}$	$5,037\ 10^{-1}$	$3,585\ 10^{-6}$	$3,450\ 10^{-6}$
$2\ 10^{-5}$	$6,320\ 10^{-3}$	$6,298\ 10^{-3}$	$5,041\ 10^{-1}$	$5,038\ 10^{-1}$	$5,736\ 10^{-5}$	$5,520\ 10^{-5}$
$8\ 10^{-5}$	$2,529\ 10^{-2}$	$2,514\ 10^{-2}$	$5,050\ 10^{-1}$	$5,046\ 10^{-1}$	$9,162\ 10^{-4}$	$8,826\ 10^{-4}$
$3,2\ 10^{-4}$	$9,889\ 10^{-2}$	$9,766\ 10^{-2}$	$5,191\ 10^{-1}$	$5,181\ 10^{-1}$	$1,425\ 10^{-2}$	$1,348\ 10^{-2}$
$1,28\ 10^{-3}$	$3,025\ 10^{-1}$	$2,901\ 10^{-1}$	$6,745\ 10^{-1}$	$6,415\ 10^{-1}$	$1,608\ 10^{-1}$	$1,289\ 10^{-1}$
$5,12\ 10^{-3}$	$5,449\ 10^{-1}$	$5,755\ 10^{-1}$	1,148	$9,571\ 10^{-1}$	$5,871\ 10^{-1}$	$4,113\ 10^{-1}$
$2,048\ 10^{-2}$	1,011	1,068	1,716	1,573	1,014	$9,033\ 10^{-1}$
$8,192\ 10^{-2}$	1,674	1,822	2,833	2,749	1,674	1,663
$3,277\ 10^{-1}$	2,352	2,691	4,698	4,786	2,352	2,542

TABLEAU A.3 ($p=1$, $\mu = 50$)

g	p_r		q		q_r	
	Méthode simplifiée	Bessel	Méthode simplifiée	Bessel	Méthode simplifiée	Bessel
$5\ 10^{-6}$	$1,591\ 10^{-3}$	$1,590\ 10^{-3}$	$4,303\ 10^{-1}$	$4,329\ 10^{-1}$	$9,000\ 10^{-6}$	$8,811\ 10^{-6}$
$2\ 10^{-5}$	$6,363\ 10^{-3}$	$6,352\ 10^{-3}$	$4,305\ 10^{-1}$	$4,330\ 10^{-1}$	$1,439\ 10^{-4}$	$1,408\ 10^{-4}$
$8\ 10^{-5}$	$2,524\ 10^{-2}$	$2,512\ 10^{-2}$	$4,327\ 10^{-1}$	$4,351\ 10^{-1}$	$2,278\ 10^{-3}$	$2,212\ 10^{-3}$
$3,2\ 10^{-4}$	$8,974\ 10^{-2}$	$8,676\ 10^{-2}$	$4,624\ 10^{-1}$	$4,612\ 10^{-1}$	$3,135\ 10^{-2}$	$2,773\ 10^{-2}$
$1,28\ 10^{-3}$	$1,878\ 10^{-1}$	$1,906\ 10^{-1}$	$6,154\ 10^{-1}$	$5,617\ 10^{-1}$	$1,795\ 10^{-1}$	$1,246\ 10^{-1}$
$5,12\ 10^{-3}$	$3,664\ 10^{-1}$	$3,756\ 10^{-1}$	$8,365\ 10^{-1}$	$7,585\ 10^{-1}$	$3,823\ 10^{-1}$	$3,075\ 10^{-1}$
$2,048\ 10^{-2}$	$6,910\ 10^{-1}$	$7,150\ 10^{-1}$	1,207	1,151	$6,909\ 10^{-1}$	$6,469\ 10^{-1}$
$8,192\ 10^{-2}$	1,223	1,291	1,957	1,921	1,223	1,225
$3,277\ 10^{-1}$	1,932	2,115	3,321	3,354	1,932	2,052

TABLEAU A.4 ($p=1$, $\mu = 200$)

g	p_r		q		q_r	
	Méthode simplifiée	Bessel	Méthode simplifiée	Bessel	Méthode simplifiée	Bessel
5 10^{-6}	1,594 10^{-3}	1,596 10^{-3}	3,946 10^{-1}	3,972 10^{-1}	3,607 10^{-5}	3,553 10^{-5}
2 10^{-5}	6,330 10^{-3}	6,312 10^{-3}	3,952 10^{-1}	3,976 10^{-1}	5,713 10^{-4}	5,586 10^{-4}
8 10^{-5}	2,259 10^{-2}	2,185 10^{-2}	4,026 10^{-1}	4,042 10^{-1}	7,888 10^{-3}	7,018 10^{-3}
3,2 10^{-4}	4,813 10^{-2}	4,849 10^{-2}	4,410 10^{-1}	4,293 10^{-1}	4,603 10^{-2}	3,184 10^{-2}
1,28 10^{-3}	9,643 10^{-2}	9,739 10^{-2}	4,968 10^{-1}	4,785 10^{-1}	1,006 10^{-1}	8,013 10^{-2}
5,12 10^{-3}	1,900 10^{-1}	1,927 10^{-1}	5,905 10^{-1}	5,772 10^{-1}	1,900 10^{-1}	1,752 10^{-1}
2,048 10^{-2}	3,685 10^{-1}	3,759 10^{-1}	7,861 10^{-1}	7,747 10^{-1}	3,685 10^{-1}	3,583 10^{-1}
8,192 10^{-2}	6,928 10^{-1}	7,140 10^{-1}	1,174	1,167	6,928 10^{-1}	6,966 10^{-1}
3,277 10^{-1}	1,226	1,289	1,926	1,935	1,226	1,272

TABLEAU A.5 ($p=2$, $\mu=20$)

g	p_r		q		q_r	
	Méthode simplifiée	Bessel	Méthode simplifiée	Bessel	Méthode simplifiée	Bessel
$5\ 10^{-6}$	$9,417\ 10^{-4}$	$9,310\ 10^{-4}$	$4,608\ 10^{-1}$	$4,609\ 10^{-1}$	$2,139\ 10^{-6}$	$2,037\ 10^{-6}$
$2\ 10^{-5}$	$3,766\ 10^{-3}$	$3,723\ 10^{-3}$	$4,608\ 10^{-1}$	$4,609\ 10^{-1}$	$3,423\ 10^{-5}$	$3,259\ 10^{-5}$
$8\ 10^{-5}$	$1,504\ 10^{-2}$	$1,486\ 10^{-2}$	$4,614\ 10^{-1}$	$4,615\ 10^{-1}$	$5,466\ 10^{-4}$	$5,197\ 10^{-4}$
$3,2\ 10^{-4}$	$5,890\ 10^{-2}$	$5,769\ 10^{-2}$	$4,696\ 10^{-1}$	$4,692\ 10^{-1}$	$8,505\ 10^{-3}$	$7,891\ 10^{-3}$
$1,28\ 10^{-3}$	$1,833\ 10^{-1}$	$1,735\ 10^{-1}$	$5,608\ 10^{-1}$	$5,382\ 10^{-1}$	$9,630\ 10^{-2}$	$7,321\ 10^{-2}$
$5,12\ 10^{-3}$	$3,570\ 10^{-1}$	$3,634\ 10^{-1}$	$8,613\ 10^{-1}$	$7,285\ 10^{-1}$	$3,757\ 10^{-1}$	$2,476\ 10^{-1}$
$2,048\ 10^{-2}$	$6,769\ 10^{-1}$	$6,955\ 10^{-1}$	1,235	1,115	$6,835\ 10^{-1}$	$5,737\ 10^{-1}$
$8,192\ 10^{-2}$	1,189	1,240	1,966	1,870	1,189	1,117
$3,277\ 10^{-1}$	1,848	1,974	3,294	3,253	1,848	1,854

TABLEAU A.6 ($p=2$, $\mu=50$)

g	p_r		q		q_r	
	Méthode simplifiée	Bessel	Méthode simplifiée	Bessel	Méthode simplifiée	Bessel
$5\ 10^{-6}$	$9,460\ 10^{-4}$	$9,400\ 10^{-4}$	$3,963\ 10^{-1}$	$3,981\ 10^{-1}$	$5,365\ 10^{-6}$	$5,211\ 10^{-6}$
$2\ 10^{-5}$	$3,782\ 10^{-3}$	$3,757\ 10^{-3}$	$3,963\ 10^{-1}$	$3,982\ 10^{-1}$	$8,580\ 10^{-5}$	$8,326\ 10^{-5}$
$8\ 10^{-5}$	$1,500\ 10^{-2}$	$1,485\ 10^{-2}$	$3,976\ 10^{-1}$	$3,994\ 10^{-1}$	$1,358\ 10^{-3}$	$1,305\ 10^{-3}$
$3,2\ 10^{-4}$	$5,355\ 10^{-2}$	$5,122\ 10^{-2}$	$4,152\ 10^{-1}$	$4,143\ 10^{-1}$	$1,864\ 10^{-2}$	$1,591\ 10^{-2}$
$1,28\ 10^{-3}$	$1,185\ 10^{-1}$	$1,180\ 10^{-1}$	$5,082\ 10^{-1}$	$4,728\ 10^{-1}$	$1,096\ 10^{-1}$	$7,269\ 10^{-2}$
$5,12\ 10^{-3}$	$2,352\ 10^{-1}$	$2,374\ 10^{-1}$	$6,553\ 10^{-1}$	$5,952\ 10^{-1}$	$2,487\ 10^{-1}$	$1,885\ 10^{-1}$
$2,048\ 10^{-2}$	$4,525\ 10^{-1}$	$4,600\ 10^{-1}$	$8,866\ 10^{-1}$	$8,418\ 10^{-1}$	$4,522\ 10^{-1}$	$4,096\ 10^{-1}$
$8,192\ 10^{-2}$	$8,322\ 10^{-1}$	$8,542\ 10^{-1}$	1,369	1,330	$8,322\ 10^{-1}$	$8,038\ 10^{-1}$
$3,277\ 10^{-1}$	1,412	1,473	2,284	2,266	1,412	1,423

TABLEAU A.7 ($p=2$, $\mu = 200$)

g	p_r		q		q_r	
	Méthode simplifiée	Bessel	Méthode simplifiée	Bessel	Méthode simplifiée	Bessel
$5\ 10^{-6}$	$9,481\ 10^{-4}$	$9,439\ 10^{-4}$	$3,636\ 10^{-1}$	$3,664\ 10^{-1}$	$2,151\ 10^{-5}$	$2,101\ 10^{-5}$
$2\ 10^{-5}$	$3,762\ 10^{-3}$	$3,732\ 10^{-3}$	$3,639\ 10^{-1}$	$3,667\ 10^{-1}$	$3,405\ 10^{-4}$	$3,294\ 10^{-4}$
$8\ 10^{-5}$	$1,346\ 10^{-2}$	$1,289\ 10^{-2}$	$3,682\ 10^{-1}$	$3,705\ 10^{-1}$	$4,684\ 10^{-3}$	$4,024\ 10^{-3}$
$3,2\ 10^{-4}$	$3,013\ 10^{-2}$	$2,989\ 10^{-2}$	$3,916\ 10^{-1}$	$3,85\ 10^{-1}$	$2,788\ 10^{-2}$	$1,851\ 10^{-2}$
$1,28\ 10^{-3}$	$6,096\ 10^{-2}$	$6,103\ 10^{-2}$	$4,287\ 10^{-1}$	$4,156\ 10^{-1}$	$6,444\ 10^{-2}$	$4,870\ 10^{-2}$
$5,12\ 10^{-3}$	$1,208\ 10^{-1}$	$1,216\ 10^{-1}$	$4,869\ 10^{-1}$	$4,774\ 10^{-1}$	$1,207\ 10^{-1}$	$1,088\ 10^{-1}$
$2,048\ 10^{-2}$	$2,367\ 10^{-1}$	$2,389\ 10^{-1}$	$6,102\ 10^{-1}$	$6,013\ 10^{-1}$	$2,367\ 10^{-1}$	$2,260\ 10^{-1}$
$8,192\ 10^{-2}$	$4,537\ 10^{-1}$	$4,603\ 10^{-1}$	$8,556\ 10^{-1}$	$8,485\ 10^{-1}$	$4,537\ 10^{-1}$	$4,473\ 10^{-1}$
$3,277\ 10^{-1}$	$8,343\ 10^{-1}$	$8,538\ 10^{-1}$	1,339	1,337	$8,343\ 10^{-1}$	$8,409\ 10^{-1}$

L'observation de ces tableaux entraîne les remarques suivantes :

- Lois asymptotiques.

Pour les glissements très faibles, f_{r} suit une loi en g, q_{r} une loi en g^2. Pour les glissements élevés, f_{r} et q_{r} suivent une loi en g. Ces lois s'expliquent très bien à partir des lois de variation de r_{r} et x_{r}, dessinées fig. A.4 et A.5 et commentées au § A.6.3., et sachant que la confrontation a été faite à tension constante.

On appellera "glissement de coupure" la valeur - approximative - du glissement auquel la transition se fait entre les deux lois (on peut voir sur les fig. A.4 et A.5 que le glissement de coupure dépend beaucoup de la perméabilité).

- Comparaison aux glissements faibles.

La concordance des deux méthodes est excellente aux glissements faibles.

- Comparaison aux glissements intermédiaires (zone du glissement de coupure)

La concordance des deux méthodes continue à être très satisfaisante pour f_{r}, où l'erreur relative est de l'ordre de μ^{-1} (voir par exemple les cas $\mu = 20$, où le glissement de coupure est de l'ordre de $2{,}5.10^{-3}$, ou $\mu = 200$, où le glissement de coupure est de l'ordre de $2{,}5.10^{-4}$).

On constate par contre des divergences plus notables en ce qui concerne q_{r} (écart jusqu'à 30 %), divergences moindres lorsqu'on confronte les valeurs de q (écart de l'ordre de 20 % pour les valeurs les plus défavorables de μ, c'est-à-dire les valeurs faibles).

- Comparaison aux glissements élevés.

Pour les glissements les plus élevés explorés, on constate encore des écarts, ce qui semble étonnant puisque l'effet de la courbure ne devrait plus se faire sentir. En réalité c'est ici l'hypothèse faite sur le courant magnétisant qui se fait sentir : dans l'hypothèse simplifiée on a supposé que le courant magnétisant était le même quel que soit le glissement, or aux glissements élevés, le champ ayant plus de mal à pénétrer, le courant magnétisant se trouve renforcé (voir Bibl. [15] . Cette différence s'atténuerait si on avait considéré des glissements encore plus élevés, du fait que le courant I_{r} devient de plus en plus grand devant I_{m} .

- Conclusion.

Les écarts entre le modèle simplifié et le résultat du calcul rigoureux restent dans une limite tout à fait acceptable pour l'application de cette simplification. En effet les écarts maximaux constatés (de l'ordre de 30 %) concernent des valeurs de glissements où il est certain que les phénomènes sous les encoches, c'est-à-dire où il conviendra de tenir compte de la courbure, voient leur contribution énergétique commencer à devenir faible en valeur relative, du fait de l'effet d'écran des circuits plus proches de l'entrefer, si bien que l'erreur relative se trouve diminuée d'autant, et devient alors d'un ordre de grandeur tout à fait acceptable, compte tenu du fait que les exigences de précision ne sont pas extrêmement sévères dans tous les problèmes de régimes anormaux ou transitoires, dont l'approche constitue l'objet de la présente méthode.

A.6.3 - Impédance du rotor.

Il a paru intéressant d'indiquer à titre d'illustration de la méthode, les valeurs trouvées pour l'impédance propre au rotor $r_r + j x_r$ (c'est-à-dire notamment abstraction faite du magnétisant). On pourra ainsi les comparer aux valeurs numériques usuellement rencontrées dans les schémas équivalents obtenus par les méthodes basées sur le modèle "classique" (voir § 1.3.1).

Sur les fig. A.4 et A.5 sont donc reportées les lois de variations en fonction de g, de la résistance rotorique r_r en valeur réduite et de la réactance rotorique x_r en valeur réduite, obtenues à partir de R_r et X_r par les relations classiques :

$$r_r = \frac{R_r S_n}{U_n^2} \qquad x_r = \frac{X_r S_n}{U_n^2}$$

R_r et X_r sont les quantités figurant sur les schémas fig. A.2 et A.3, ou données par les formules (A.49) et (A.50).

La fig. A.4 est relative au cas bipolaire ($p = 1$) pour les 3 valeurs de perméabilité relative $\mu = 5, 20, 200$.

La fig. A.5 est relative au cas quadripolaire ($p = 2$) pour les 3 valeurs de perméabilité relative $\mu = 5, 20, 200$.

Figure A1

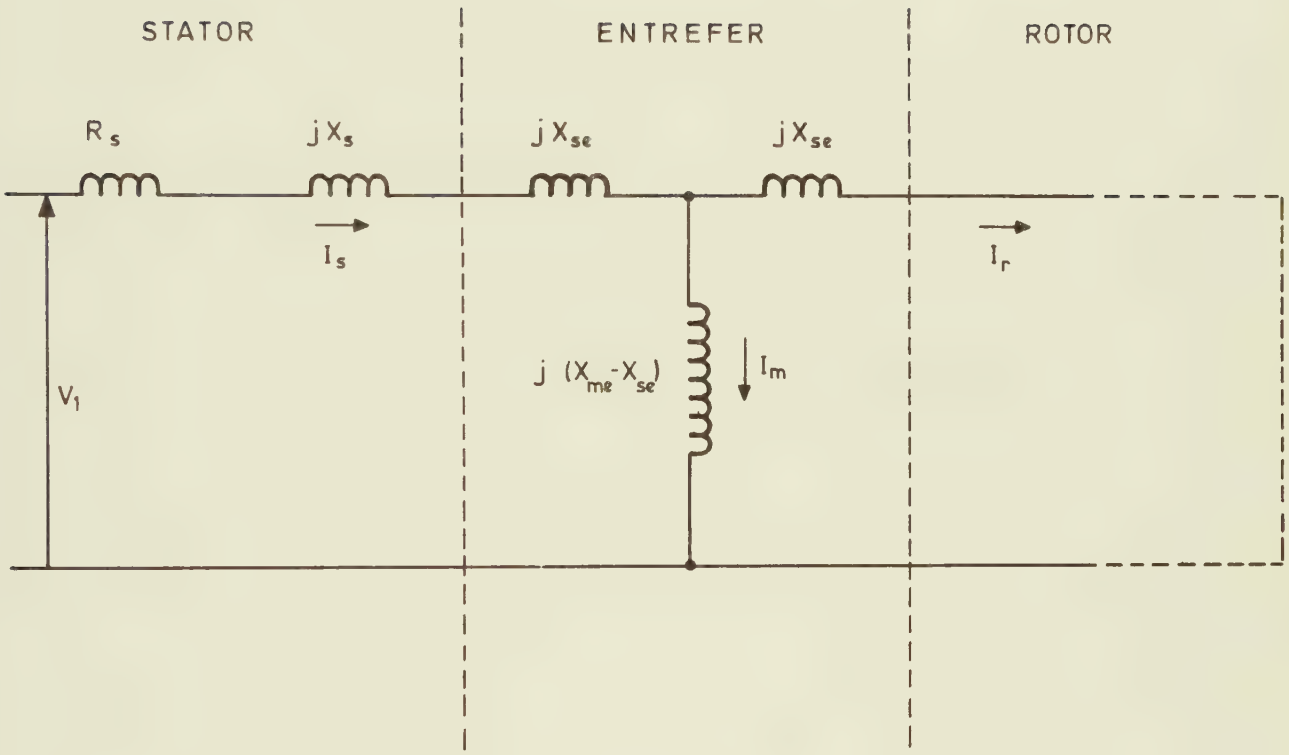


Fig. A 1

REPRESENTATION DE L'ENTREFER PAR UN SCHEMA EQUIVALENT EN T

Figure A2

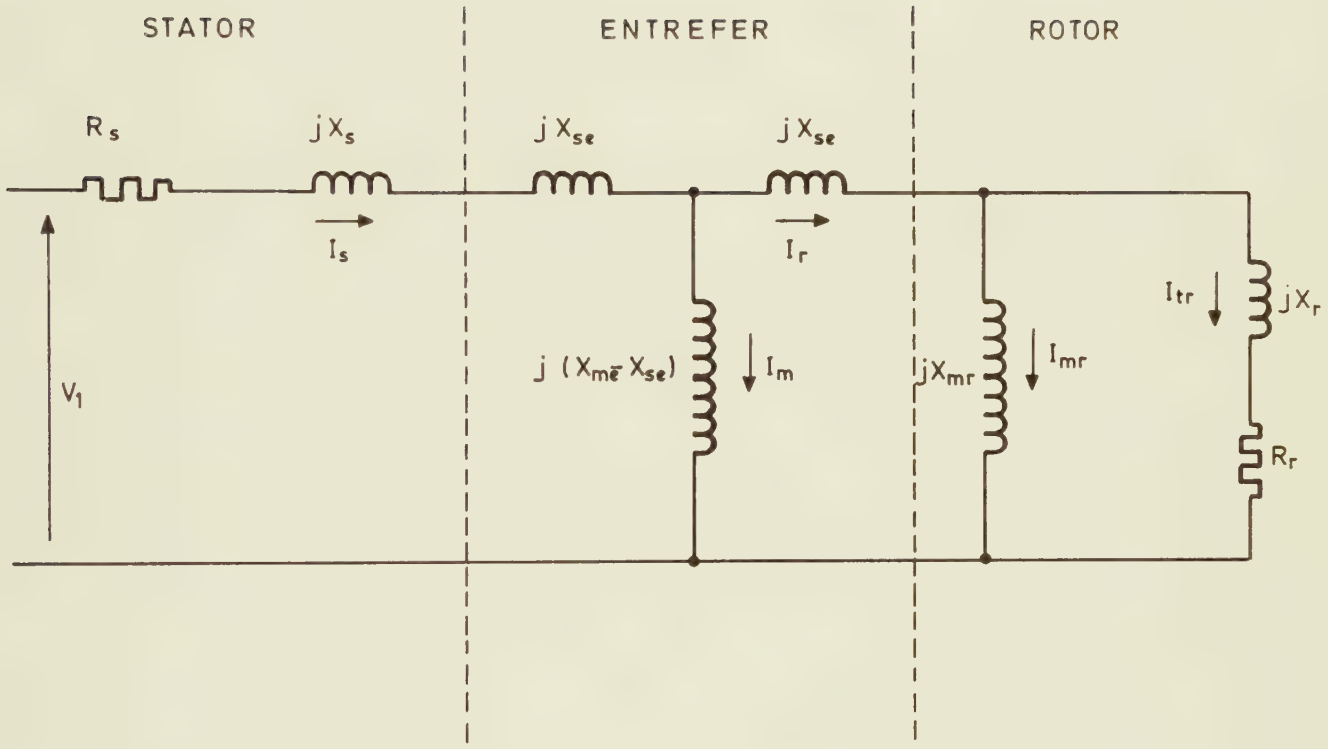


Fig. A2

SCHEMA EQUIVALENT DANS LEQUEL APPARAISSENT LES IMPEDANCES PROPRES A CHACUNE DES TROIS REGIONS DE LA MACHINE

Figure A 3

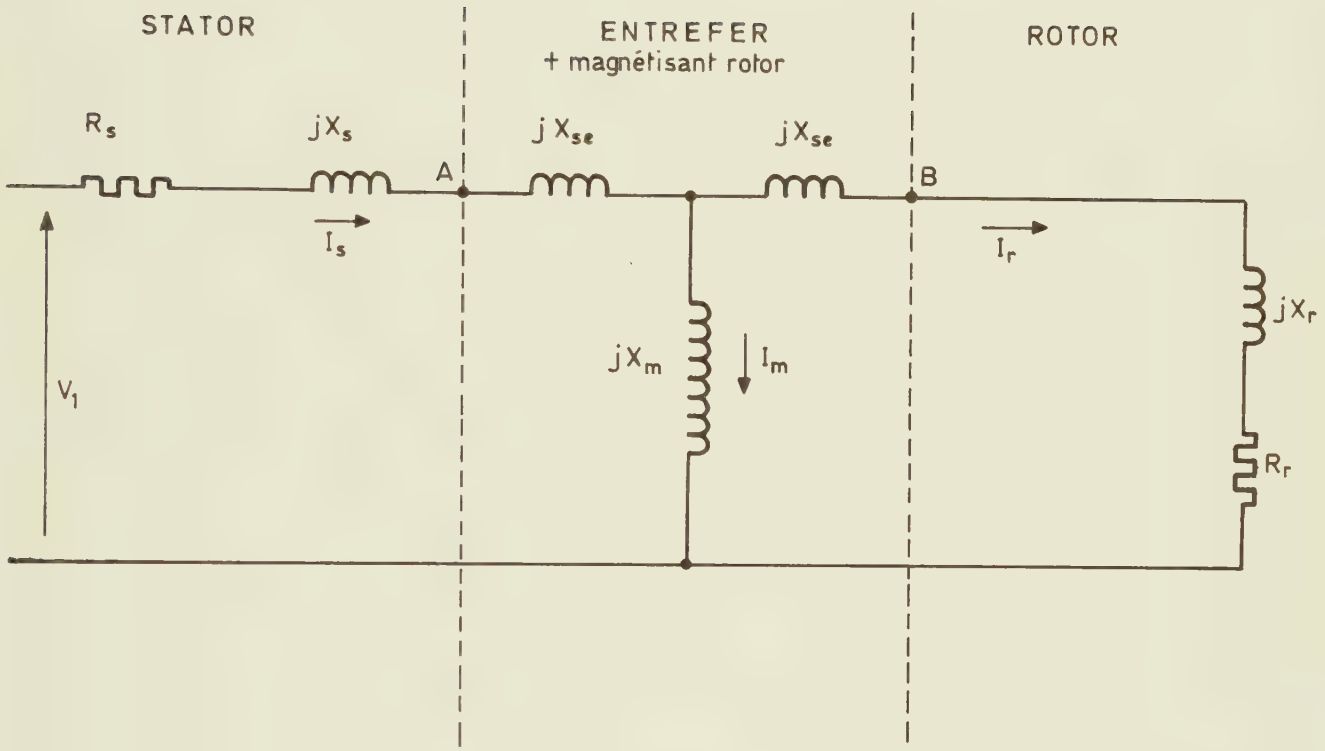


Fig. A 3

SCHEMA EQUIVALENT SIMPLIFIE FINALEMENT ADOPTE DANS LEQUEL LE COURANT MAGNETISANT DE L'ENTREFER ET DU ROTOR SONT PRIS EN COMPTE PAR UNE SEULE BRANCHE

Figure A4

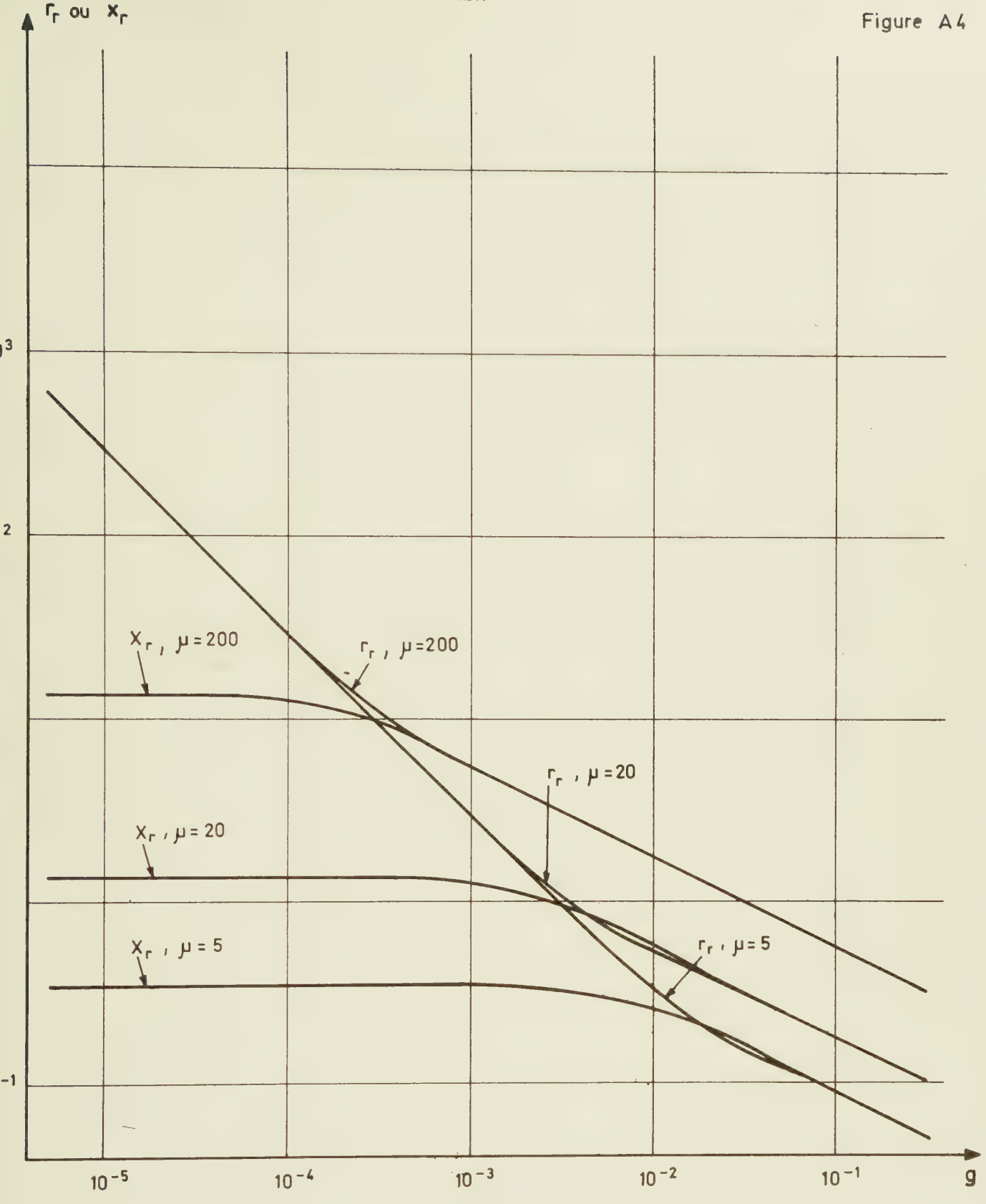


Fig. A4

EXEMPLE DE VARIATION, EN FONCTION DU GLISSEMENT, DE LA RESISTANCE r_r ET DE LA RESISTANCE x_r, VUES DU STATOR, D'UN ROTOR BIPOLAIRE (p=1) ABSTRACTION FAITE DE L'IMPEDANCE MAGNETISANTE

Figure A 5

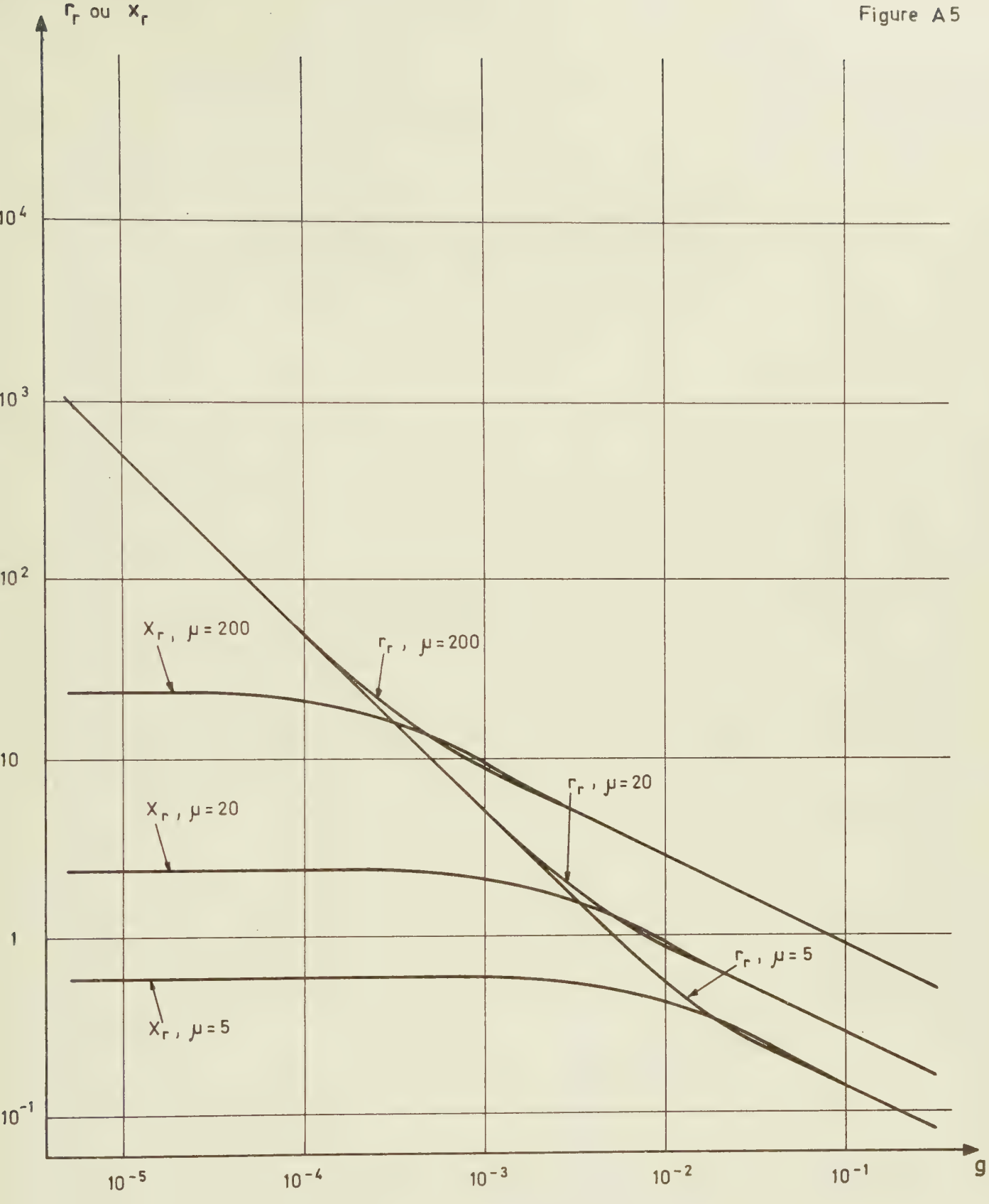


Fig. A 5

EXEMPLE DE VARIATION, EN FONCTION DU GLISSEMENT, DE LA RESISTANCE r_r ET DE LA RESISTANCE x_r, VUES DU STATOR, D'UN ROTOR QUADRIPOLAIRE (p=2) ABSTRACTION FAITE DE L'IMPEDANCE MAGNETISANTE

Annexe B

PROCEDURE DE DETERMINATION DES PARAMETRES GEOMETRIQUES UTILISES POUR LE CALCUL

B.1. LES QUATRE ZONES DU ROTOR.

Sur la fig. 10 on distingue 4 zones :

La zone a (ou zone bobinée) est caractérisée par la hauteur h_a et l'angle θ_a.

La hauteur h_a est choisie égale à la profondeur de l'encoche la plus profonde ; s'il y a, sous cette encoche, une gouttière destinée au passage du fluide réfrigérant, on supposera, pour la théorie, que cette gouttière n'existe pas.

L'angle θ_a est déterminé en considérant la dernière encoche bobinée (même si elle est moins profonde que les autres) ; la limite de l'angle θ_a se situe à une demi-largeur de dent au-delà de cette encoche.

Les autres zones b , c , d , sont aussi caractérisées en angle par θ_a

La zone b est limitée au diamètre D_b . On a évidemment :

$$D_b + 2h_a = D_r$$

D_r = diamètre du rotor.

La zone c est caractérisée par la hauteur h_c , profondeur des encoches de zone polaire.

La zone d est caractérisée par le diamètre D_d , avec :

$$D_d + 2h_c = D_r$$

Dans le cas où les pôles ne sont pas pourvus de cales amagnétiques, h_c est nul. Les conséquences qui en résultent sont expliquées en Annexe D.

B.2. SCHEMATISATION D'UN PAS DENTAIRE DE ZONE BOBINEE (fig. 11).

La zone bobinée comporte en général un certain nombre d'encoches identiques, plus éventuellement, vers les pôles, quelques encoches moins profondes. On ne considérera que l'encoche la plus profonde, dont la hauteur h_a a été déterminée ci-dessus. On distingue dans l'angle au centre correspondant à l'ensemble d'une encoche et d'une dent 8 régions représentées fig. 11. Le dessin de l'encoche est schématisé par rapport aux encoches réelles, les différentes dimensions seront définies comme suit :

On définit d'abord le pas dentaire à la périphérie t_{a1}, quotient de

$$\frac{D_\alpha \, \theta_a}{2}$$

par le nombre d'encoches bobinées par demi-pôle. Cette méthode est destinée à prendre en compte le cas où les dents n'ont pas toutes même largeur et permet de définir la largeur moyenne de dent.

- La région 1 (cale) est en général de section trapézoïdale. On la caractérise par sa hauteur h_{a1} (depuis l'alésage jusqu'à l'amortisseur) et par sa section s_{a1}, d'où la largeur du rectangle équivalent :

$$b_{a1} = s_{a1} / h_{a1}$$

- La région 2 (amortisseur) est, de même, caractérisée par la hauteur h_{a2} et la section s_{a2}, d'où la largeur du rectangle équivalent :

$$b_{a2} = s_{a2} / h_{a2}$$

- La région 3 (inducteur) est caractérisée par la hauteur $h_{a3} = h_a - h_{a1} - h_{a2}$ et par la section encochée sur la hauteur h_{a3}, soit s_{a3}, d'où la largeur du rectangle équivalent :

$$b_{a3} = s_{a3} / h_{a3}$$

- Les régions 5, 6 et 7 (fer en face des cales, amortisseurs, inducteur respectivement) sont simplement caractérisées par leurs hauteurs respectives h_{a1}, h_{a2}, h_{a3}. En ce qui concerne les largeurs, il se trouve que, dans les turbo-alternateurs de grande puissance, les formes d'encoches rotoriques sont dessinées de telle façon que les dents aient une largeur peu variable sur toute leur hauteur, dans le but évident d'éviter des saturations locales excessives. En conséquence, on affectera aux zones 5, 6 et 7 une largeur unique l_a définie comme suit :

On considère la section d'encoche $s_a = s_{a1} + s_{a2} + s_{a3}$ et la hauteur d'encoche h_a. On définit une largeur moyenne d'encoche $b_a = s_a / h_a$.

On considère le pas dentaire à mi-hauteur :

$$t_a = t_{a1} \times \frac{D_b + h_a}{D_r}$$

La largeur moyenne de dent sera :

$$l_a = t_a - b_a$$

- La région 4, dont les problèmes de recouvrement avec la région 5 sont exposés au § 3.2.3.3., est caractérisée par la largeur $l_{a1} = t_{a1} - b_{a1}$, et par les deux segments en trait interrompu (fig. 11) formant avec les coins de dents des angles d'environ 45°.

- La région 8 correspond à tout le secteur angulaire de pas dentaire :

$$t_b = t_{a1} \times \frac{D_b}{D_r}$$

et de rayon $\frac{D_b}{2}$.

B.3. SCHEMATISATION D'UN PAS DENTAIRE DE ZONE POLAIRE (fig. 12).

La schématisation est basée sur le même principe que pour la zone bobinée, simplement les régions 3 et 7 disparaissent, et les indices a et b sont remplacés par c et d, respectivement.

On définit donc :

- le pas dentaire à la périphérie t_{c1} quotient de $\frac{D_r}{2}\left(\frac{\pi}{2p} - \theta_a\right)$ par le nombre d'encoches non bobinées par demi-pôle,

- la région 1 caractérisée par h_{c1} , s_{c1} , et $b_{c1} = s_{c1} / h_{c1}$

- la région 2 caractérisée par h_{c2} , s_{c2} , et $b_{c2} = s_{c2} / h_{c2}$

- les régions 5 et 6, de hauteur h_{c1} et h_{c2}

- la section d'encoche $s_c = s_{c1} + s_{c2}$, la hauteur d'encoche h_c, la largeur moyenne d'encoche $b_c = s_c / h_c$, le pas dentaire à mi-hauteur

$$t_c = t_{c1} \times \frac{D_d + h_c}{D_r}$$

d'où, enfin, la largeur moyenne de dent

$$\ell_c = t_c - b_c$$

la zone 8, caractérisée par le pas dentaire

$$t_d = t_{c1} \times \frac{D_d}{D_r}$$

et par le diamètre D_d

La zone 4 caractérisée par la largeur $\ell_{c1} = t_{c1} - b_{c1}$ et par les deux segments en trait interrompu (fig. 12).

B.4. REMARQUE.

Pour des raisons mécaniques évidentes, la section des cales n'est jamais rectangulaire ; souvent elle est trapézoïdale d'où il résulte en particulier que la largeur de la cale à la frontière de l'entrefer est souvent inférieure à b_{a1} . On a cependant pu vérifier qu'on commet une erreur négligeable (et même dans l'évaluation des pertes en régime inverse), en assimilant la section de cale à un rectangle.

Annexe C

RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS DONNANT LES DIFFERENTS COEFFICIENTS DE PENETRATION DANS UNE DENT ET DANS UNE ENCOCHE

Considérons tout d'abord le cas d'un pas polaire de zone bobinée

Le système à résoudre est constitué des équations (9) du chapitre 3 , que nous reproduisons ci-dessous

$$\mu_a \alpha_{ai} \operatorname{tg} \frac{\alpha_{ai} b_{ai}}{2} = \beta_{ai} \operatorname{th} \frac{\beta_{ai} \ell_{aj}}{2} \qquad (C.1)$$

$$\beta_{ai}^2 + \gamma_{ai}^2 = \frac{j \omega_0 g \mu_0 \mu_a}{\rho} \qquad (C.2)$$

$$\gamma_{ai}^2 - \alpha_{ai}^2 = \frac{j \omega_0 g \mu_0}{\rho_{ai}} \qquad (C.3)$$

et dans lequel les inconnues sont α_{ai} , β_{ai} , γ_{ai} . Du fait des différentes valeurs de ρ_{ai} , b_{ai} et ℓ_{aj} , la solution n'est pas la même pour les paires de régions $(i, j) = (1,5), (2,6), (3,7)$.

Cette circonstance est gênante en ce qui concerne β_{ai} et α_{ai} , car on voit d'après l'équation (6) que ces coefficients conditionnent la loi de variation en z des champs, et qu'en conséquence des valeurs différentes rendraient impossible la continuité du champ au passage des frontières parallèles à l'axe oz.

Pour résoudre rigoureusement cette difficulté il faudrait remplacer les expressions (6) où n'intervient que le seul indice i relatif à la région considérée, par une combinaison linéaire de 3 expressions où figureraient les paramètres relatifs aux 3 paires de régions $i = 1, 2, 3$.

Une telle complication ne paraît pas nécessaire dans la mesure où les ordres de grandeur des termes des équations (C.1) (C.2) et (C.3) conduisent à des valeurs de α_{ai} et β_{ai} peu variables en fonction de i , autorisant de leur affecter une valeur α_a et β_a indépendante de i . Ceci sera vrai en particulier d'après (C.2) si $|\gamma_{ai}| \ll |\beta_{ai}|$, puis, d'après (C.1) si b_{ai} et ℓ_{aj} sont peu variables

en fonction de i et j respectivement (cette dernière condition est vérifiée dans la pratique). Nous nous proposons donc d'évaluer l'erreur faite en négligeant γ_{ai}^2 dans (C.2) et en remplaçant dans (C.1) b_{ai} et ℓ_{aj} par b_a et ℓ_a largeurs moyennes de l'encoche et de la dent respectivement.

Il est suffisant d'effectuer cette évaluation aux glissements faibles, où :

$$tg \frac{\alpha_{ai} b_{ai}}{2} \# \frac{\alpha_{ai} b_{ai}}{2} \quad \text{et} \quad th \frac{\beta_{ai} \ell_{aj}}{2} \# \frac{\beta_{ai} \ell_{aj}}{2}$$

En effet, lorsque g augmente, le rapport $\left| \frac{\alpha_{ai}}{\beta_{ai}} \right|$ diminue, car à cause de $\mu_a \gg 1$ $th \frac{\beta_{ai} \ell_{aj}}{2}$ tend vers 1 alors que le premier membre de (C.1.) varie encore comme α_{ai}^2, et de (C.3) il résulte alors que le rapport $\left| \frac{\gamma_{ai}}{\beta_{ai}} \right|$ diminue aussi, lorsque g croît.

On aura donc un majorant de l'erreur en ne considérant que le cas de glissements faibles, où la solution rigoureuse est donnée par :

$$\text{(C.4)} \quad \begin{cases} \mu_a \alpha_{ai}^2 b_{ai} = \beta_{ai}^2 \ell_{aj} \\ \beta_{ai}^2 + \gamma_{ai}^2 = \dfrac{j \omega_o g \mu_o \mu_a}{\rho} \\ \gamma_{ai}^2 - \alpha_{ai}^2 = \dfrac{j \omega_o g \mu_o}{\rho_{ai}} \end{cases}$$

et où la solution approchée que nous souhaitons adopter est donnée par :

$$\text{(C.5)} \quad \begin{cases} \mu_a \alpha_a^2 b_a = \beta_a^2 \ell_a \\ \beta_a^2 = \dfrac{j \omega_o g \mu_o \mu_a}{\rho} \\ \gamma_{ai}^2 - \alpha_a^2 = \dfrac{j \omega_o g \mu_o}{\rho_{ai}} \end{cases}$$

En comparant les solutions de ces deux systèmes, on constate que, dans la mesure où $\mu_a \gg 1$, et où $b_{ai} \sim b_a \; \forall i$ et $\ell_{aj} \sim \ell_a \; \forall j$, d'une part l'erreur sur γ_{ai} est toujours négligeable et l'erreur sur α_{ai} et β_{ai} s'exprime par exemple par le rapport des solutions de (C.4) et de (C.5)

$$\frac{\alpha_{ai}^2}{\alpha_a^2} \# \frac{\beta_{ai}^2}{\beta_a^2} \# 1 - \frac{\rho}{\mu_a \rho_{ai}} \tag{C.6}$$

L'erreur est donc nulle dans la paire de régions (3,7) (l'hypothèse d'inducteur ouvert revient à considérer $\rho_{a3} = \infty$), celle qui occupe le plus grand volume. Dans les autres régions l'erreur sera décroissante en fonction de μ_a ; en adoptant ici pour μ_a une valeur faible par exemple $\mu_a = 20$, on aura un majorant de l'erreur.

Dans la paire de régions (1,5), l'expression (C.6) est très voisine de 1 pour des cales résistives ($\rho/\rho_{ai} \sim 1/3$ pour des cales en acier amagnétique) ; c'est moins vrai pour des cales conductrices ; par exemple dans le cas du bronze $\rho/\rho_{ai} \sim 3$, ce qui avec $\mu_a = 20$ donne une erreur de 16 % sur (C.6) donc de 8% seulement sur α_a et β_a ; ce qui ici encore n'est pas gênant compte tenu de ce qui va être dit ci-dessous.

Reste en effet le cas de l'amortisseur, paire de régions (2,6), pour lequel $\rho / \rho_{ai} \sim 20$: l'erreur est beaucoup plus forte ; mais il faut bien voir que cette erreur est sans grande conséquence : la région 6 est très petite et de faible influence ; la région 2 a une influence beaucoup plus grande mais seule l'erreur sur α y intervient. Or α_{ai} même majoré jusqu'à la valeur α_a reste faible pour les glissements usuels ($g \leq 2$) et la répartition du champ dans l'amortisseur, comme d'ailleurs dans les cales et l'espace occupé par l'inducteur (régions 1, 2, 3) reste voisine de lignes de champ parallèles, transversales à l'encoche, pour lesquelles il est donc surtout important de respecter γ_{ai} et les conditions aux frontières transversales, ce qui a été fait.

Par contre, la validité du modèle n'est plus assurée au-delà de $g = 2$, il ne pourra donc être appliqué pour des calculs de pertes dus aux harmoniques, qui correspondent à $g \gg 2$.

En définitive nous remplaçons donc le système (C.1), (C.2), (C.3) par :

$$\mu_a \alpha_a \operatorname{tg} \frac{\alpha_a b_a}{2} = \beta_a \operatorname{th} \frac{\beta_a \ell_a}{2} \tag{C.7}$$

$$\beta_a^2 = \frac{j \omega_o g \mu_o \mu_a}{\rho} \tag{C.8}$$

$$\gamma_{ai}^2 - \alpha_a^2 = \frac{j \omega_o g \mu_o}{\rho_{ai}} \tag{C.9}$$

système qui a été adopté en (9) au chapitre 3 .

La même méthode et les mêmes conclusions ont été appliquées à la zone polaire d'où les équations (19) et (20).

Annexe D

CALCUL DES PUISSANCES POUR UN PAS DENTAIRE

Ces calculs sont destinés à expliciter les coefficients R_{ak}, X_{ak}, R_{b8} et X_{b8} de (24), et les coefficients R_{ck}, X_{ck}, R_{d8} et X_{d8} de (27) ; ces coefficients sont relatifs à un pas dentaire quelconque (secteur cylindrique comportant une encoche et une dent) mais bien sûr le calcul est différent pour un pas dentaire de la zone bobinée (indices a et b) et pour un pas dentaire de la zone polaire (indices c et d).

Le principe de la méthode est indiqué au § 4.1.

D.1. PAS DENTAIRE DE LA ZONE BOBINEE.

Nous utilisons les expressions du § 3.2.

D.1.1 - Région 4.

Cette région n'est à prendre en considération que dans l'hypothèse A. Dans ce cas, et conformément à l'hypothèse du § 3.2. 3.3.3., nous affectons au champ H_{az4} une loi de variation en y de même forme que la variation en z de H_{ay5}, soit :

$$H_{az4} = H_{az40} \frac{sh\ \beta_a \left(\frac{l_a}{2} - y\right)}{sh\ \frac{\beta_a l_a}{2}} \tag{D.1}$$

avec H_{az40} donné par (17), mais nous limiterons sa zone d'influence à la hauteur $\frac{l_a}{2}$ d'où le courant :

$$J_{ax4} = \frac{\partial H_{az4}}{\partial y} = \frac{-\beta_a H_{az40}\ ch\ \beta_a \left(\frac{l_a}{2} - y\right)}{sh\ \frac{\beta_a l_a}{2}} \tag{D.2}$$

Il y a évidemment recouvrement des zones d'influence de 4 et 5, mais ce n'est pas gênant car la région 4 n'a d'importance que pour les glissements élevés, pour lesquels $\delta_a \ll \ell_a$, si bien que le recouvrement est réduit à une zone très petite. Pour les glissements plus faibles le champ $H_{a_{24}}$ devient relativement de plus en plus faible et en outre intéresse une zone petite par rapport au reste, si bien que l'erreur introduite reste toujours négligeable.

On obtient :

$$P_{a4} = \frac{\rho \left|A_{a1}\right|^2 \left|ch\,\gamma_{a1} h_{a1} + k_{a1}\, sh\,\gamma_{a1} h_{a1}\right|^2 \left(sh\,\frac{\ell_a}{\delta_a} + \sin\frac{\ell_a}{\delta_a}\right) \ell_{a1} L_r \left|H_a\right|^2}{\delta_a g \left|\gamma_{a1}\right|^2 \left(ch\,\frac{\ell_a}{\delta_a} - \cos\frac{\ell_a}{\delta_a}\right)} \tag{D.3}$$

$$Q_{a4} = \frac{\rho \left|A_{a1}\right|^2 \left|ch\,\gamma_{a1} h_{a1} + k_{a1}\, sh\,\gamma_{a1} h_{a1}\right|^2 \left(sh\,\frac{\ell_a}{\delta_a} - \sin\frac{\ell_a}{\delta_a}\right) \ell_{a1} L_r \left|H_a\right|^2}{\delta_a g \left|\gamma_{a1}\right|^2 \left(ch\,\frac{\ell_a}{\delta_a} - \cos\frac{\ell_a}{\delta_a}\right)} \tag{D.4}$$

d'où conformément à (24) et (25)

$$R_{a4} = \frac{P_{a4}}{\left|I_a\right|^2} \tag{D.5}$$

$$X_{a4} = \frac{Q_{a4}}{\left|I_a\right|^2} \tag{D.6}$$

D.1.2 - Régions 1, 2, 3, 5, 6, 7.

Le calcul est le même pour les trois couples de régions (1, 5), (2,6), (3, 7), le calcul s'effectue donc en utilisant le couple d'indices (i, j).

Séparons en partie réelle et imaginaire les nombres complexes :

$$\gamma_{ai} = \gamma_{air} + j\,\gamma_{ais} \tag{D.7}$$

$$k_{ai} = k_{air} + j\,k_{ais} \tag{D.8}$$

$$\alpha_a = \alpha_{ar} + j\,\alpha_{as} \tag{D.9}$$

nous sommes amenés à calculer l'expression :

$$\left| \operatorname{ch} \gamma_{ai}(h_{ai}-y) + k_{ai} \operatorname{sh} \gamma_{ai}(h_{ai}-y) \right|^2 =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1+|k_{ai}|^2}{2} \operatorname{ch} 2\gamma_{air}(h_{ai}-y) + \dfrac{1-|k_{ai}|^2}{2} \cos 2\gamma_{ais}(h_{ai}-y) \\ \\ + k_{air} \operatorname{sh} 2\gamma_{air}(h_{ai}-y) - k_{ais} \sin 2\gamma_{ais}(h_{ai}-y) \end{array} \right.$$

et son intégrale de 0 à h_{ai} qui vaut

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{ai} = \dfrac{1+|k_{ai}|^2}{4\gamma_{air}} \operatorname{sh} 2\gamma_{air} h_{ai} + \dfrac{1-|k_{ai}|^2}{4\gamma_{ais}} \sin 2\gamma_{ais} h_{ai} \\ \\ + \dfrac{k_{air}}{2\gamma_{air}} \left(\operatorname{ch} 2\gamma_{air} h_{ai} - 1 \right) - \dfrac{k_{ais}}{2\gamma_{ais}} \left(1 - \cos 2\gamma_{ais} h_{ai} \right) \end{array} \right. \qquad \text{(D.10)}$$

ainsi que l'expression

$$\left| \operatorname{sh} \gamma_{ai}(h_{ai}-y) + k_{ai} \operatorname{ch} \gamma_{ai}(h_{ai}-y) \right|^2 =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1+|k_{ai}|^2}{2} \operatorname{ch} 2\gamma_{air}(h_{ai}-y) - \dfrac{1-|k_{ai}|^2}{2} \cos 2\gamma_{ais}(h_{ai}-y) \\ \\ + k_{air} \operatorname{sh} 2\gamma_{air}(h_{ai}-y) + k_{ais} \sin 2\gamma_{ais}(h_{ai}-y) \end{array} \right.$$

et son intégrale de 0 à h_{ai} qui vaut :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{ai} = \dfrac{1+|k_{ai}|^2}{4\gamma_{air}} \operatorname{sh} 2\gamma_{air} h_{ai} - \dfrac{1-|k_{ai}|^2}{4\gamma_{ais}} \sin 2\gamma_{ais} h_{ai} \\ \\ + \dfrac{k_{air}}{2\gamma_{air}} \left(\operatorname{ch} 2\gamma_{air} h_{ai} - 1 \right) + \dfrac{k_{ais}}{2\gamma_{ais}} \left(1 - \cos 2\gamma_{ais} h_{ai} \right) \end{array} \right. \qquad \text{(D.11)}$$

Il vient alors :

$$P_{ai} = \frac{\omega_o^2 \mu_o g |A_{ai}|^2 L_r I_{ai}}{\rho_{ai} |\alpha_a|^2 |\gamma_{ai}|^2 (ch\,\alpha_{as} b_{ai} - \cos \alpha_{ar} b_{ai})} \left(\frac{sh\,\alpha_{as} b_{ai}}{\alpha_{as}} + \frac{\sin \alpha_{ar} b_{ai}}{\alpha_{ar}} \right) |H_a|^2 \tag{D.12}$$

$$Q_{ai} = \frac{\omega_o \mu_o |A_{ai}|^2 L_r |H_a|^2}{ch\,\alpha_{as} b_{ai} - \cos \alpha_{ar} b_{ai}} \left[\frac{sh\,\alpha_{as} b_{ai}}{\alpha_{as}} \left(\frac{I_{ai}}{|\gamma_{ai}|^2} + \frac{J_{ai}}{|\alpha_a|^2} \right) + \frac{\sin \alpha_{ar} b_{ai}}{\alpha_{ar}} \left(\frac{J_{ai}}{|\alpha_a|^2} + \frac{I_{ai}}{|\gamma_{ai}|^2} \right) \right. \tag{D.13}$$

$$P_{aj} = \frac{2\rho |A_{ai}|^2 L_r I_{ai} \left(sh\,\frac{l_a}{\delta_a} + \sin \frac{l_a}{\delta_a} \right) |H_a|^2}{\delta_a |\gamma_{ai}|^2 g \left(ch\,\frac{l_a}{\delta_a} - \cos \frac{l_a}{\delta_a} \right)} \tag{D.14}$$

$$Q_{aj} = \frac{\mu_o \mu_a \omega_o |A_{ai}|^2 L_r |H_a|^2}{ch\,\frac{l_a}{\delta_a} - \cos \frac{l_a}{\delta_a}} \left[\frac{I_{ai} \delta_a}{|\gamma_{ai}|^2} \left(sh\,\frac{l_a}{\delta_a} - \sin \frac{l_a}{\delta_a} \right) + \frac{J_{ai} \delta_a^3}{2} \left(ch\,\frac{l_a}{\delta_a} + \sin \frac{l_a}{\delta_a} \right) \right. \tag{D.15}$$

d'où conformément à (24) et (25) :

(remarque : pour $i = 3$, $\gamma_{ai} = \alpha_a$ et en outre $\rho_{a3} = \infty$ d'où $R_{a3} = 0$)

$$R_{ai} = \frac{P_{ai}}{|I_a|^2} \qquad (pour\ i = 1, 2, 3) \tag{D.16}$$

$$X_{ai} = \frac{Q_{ai}}{|I_a|^2} \qquad (pour\ i = 1, 2, 3) \tag{D.17}$$

$$R_{aj} = \frac{P_{aj}}{|I_a|^2} \qquad (pour\ j = 5, 6, 7) \tag{D.18}$$

$$X_{aj} = \frac{Q_{aj}}{|I_a|^2} \qquad (pour\ j = 5, 6, 7) \tag{D.19}$$

D.1.3 - Région 8.

Conformément aux hypothèses du § 3.2.3.2., on considère qu'à la surface de cette région est appliqué un champ tangentiel $H_{bz\,80}$ donné par (13). En outre aux fréquences très basses l'influence de la courbure doit être prise en compte. La méthode adoptée est exposée en annexe A. Elle conduit donc aux valeurs suivantes de pertes, correspondant à un pas dentaire de zone bobinée, et dans lesquelles $H_{bz\,80}$ doit être remplacé par (13).

(D.21) $$P_{b8} = \frac{\rho L_r t_b k_{r\mu}}{g \delta_b} \left| H_{bz\,80} \right|^2$$

(D.22) $$Q_{b8} = \frac{\rho L_r t_b k_{x\mu}}{g \delta_b} \left| H_{bz\,80} \right|^2$$

L'indice μ doit être remplacé par 1 ou 2 selon que la machine est bipolaire ou quadripolaire et les coefficients k_{r1}, k_{x1}, k_{r2}, k_{x2} sont donnés par les formules (A.43) à (A.46) après y avoir remplacé D_r par D_b et δ par δ_b.

Conformément à (24) et (25) nous poserons, utilisant (13), (D.21) (D.22)

(D.23) $$R_{b8} = \frac{P_{b8}}{\left| I_a \right|^2}$$

(D.24) $$X_{b8} = \frac{Q_{b8}}{\left| I_a \right|^2}$$

en notant que R_{b8} et X_{b8} n'ont pas même expression pour $\mu = 1$ et $\mu = 2$.

D.1.4 - Influence des fuites de bec d'encoche (région "0").

Ce sont les fuites qui se referment dans l'entrefer, d'un bec d'encoche à l'autre.

Compte tenu du fait que nous avons déjà tenu compte, par la réactance X_{se} (voir annexe A et § 4.2.) de la part de ces fuites qui est indépendante de la présence des encoches et des dents, nous adopterons pour perméance unitaire résiduelle, la formule simplifiée suivante :

(D.25) $$P_{ao} = 0,2$$

Une telle formule revient à considérer que les fuites concernées se comportent comme si elles étaient canalisées dans un tube dont la longueur égale 5 fois l'épaisseur. Une telle hypothèse peut être considérée comme une toute première approximation, appuyée cependant sur les rapports de dimensions usuellement rencontrées dans cette zone dans les grands turbo-alternateurs.

Le champ appliqué à cette perméance, supposé uniforme, appelé et noté $\overline{H}_{azo}$, s'obtient en prenant la valeur moyenne de H_{az1} ($y = 0$) donné par (10) avec (i, j) = (1,5) soit :

(D.26) $$\overline{H}_{azo} = \frac{2A_{a1} H_a \left[sh\, \gamma_{a1} h_{a1} + k_{a1} ch\, \gamma_{a1} h_{a1} \right]}{b_{a1}\, \alpha_a^2}$$

La puissance réactive correspondante vaut alors, pour une encoche :

(D.27) $$Q_{ao} = \mu_o \omega_o L_r b_{a1}^2 \left| \overline{H}_{azo} \right|^2 P_{ao}$$

Conformément à (24) et (25) nous poserons, utilisant (D.25), (D.26) et (D.27)

(D.28) $$X_{ao} = \frac{Q_{ao}}{\left| I_a \right|^2}$$

D.2 - PAS DENTAIRE DE LA ZONE POLAIRE, MUNI D'AMORTISSEURS ET DE CALES AMAGNETIQUES.

On peut directement transposer les résultats du § D.1.

D.2.1 - Région 4.

(D.29) $$P_{c4} = \frac{\rho \left| A_{c1} \right|^2 \left| ch\, \gamma_{c1} h_{c1} + k_{c1} ch\, \gamma_{c1} h_{c1} \right|^2 \left(sh \frac{l_c}{\delta_c} + \sin \frac{l_c}{\delta_c} \right) l_{c1} L_r \left| H_c \right|^2}{\delta_c g \left| \gamma_{c1} \right|^2 \left(ch \frac{l_c}{\delta_c} - \cos \frac{l_c}{\delta_c} \right)}$$

$$Q_{c4} = \frac{\rho \left|A_{c1}\right|^2 \left|ch\,\gamma_{c1} h_{c1} + k_{c1}\, sh\,\gamma_{c1} h_{c1}\right|^2 \left(sh\,\frac{l_c}{\delta_c} - \sin\frac{l_c}{\delta_c}\right) l_{c1} L_r \left|H_c\right|^2}{\delta_c g \left|\gamma_{c1}\right|^2 \left(ch\,\frac{l_c}{\delta_c} - \cos\frac{l_c}{\delta_c}\right)} \tag{D.30}$$

d'où, conformément à (27) et (28)

$$R_{c4} = \frac{P_{c4}}{\left|I_c\right|^2} \tag{D.31}$$

$$X_{c4} = \frac{Q_{c4}}{\left|I_c\right|^2} \tag{D.32}$$

D.2.2 - Régions 1, 2, 5, 6 $(i,j) = (1,5), (2,6)$

Posons :

$$\gamma_{ci} = \gamma_{cir} + j\,\gamma_{cis}$$
$$k_{ci} = k_{cir} + j\,k_{cis}$$
$$\alpha_c = \alpha_{cr} + j\,\alpha_{cs}$$

$$\left\{ I_{ci} = \frac{1+\left|k_{ci}\right|^2}{4\gamma_{cir}} sh\,2\gamma_{cir} h_{ci} + \frac{1-\left|k_{ci}\right|^2}{4\gamma_{cis}} \sin 2\gamma_{cis} h_{ci} + \frac{k_{cir}}{2\gamma_{cir}} \left(ch\,2\gamma_{cir} h_{ci} - 1\right) - \frac{k_{cis}}{2\gamma_{cis}} \left(1 - \cos 2\gamma_{cis} h_{ci}\right) \right.$$

$$\left\{ J_{ci} = \frac{1+\left|k_{ci}\right|^2}{4\gamma_{cir}} sh\,2\gamma_{cir} h_{ci} - \frac{1-\left|k_{ci}\right|^2}{4\gamma_{cis}} \sin 2\gamma_{cis} h_{ci} + \frac{h_{cir}}{2\gamma_{cir}} \left(ch\,2\gamma_{cir} h_{ci} - 1\right) + \frac{k_{cis}}{2\gamma_{cis}} \left(1 - \cos 2\gamma_{cis} h_{ci}\right) \right.$$

d'où :

$$P_{ci} = \frac{g\,\omega_o^2\,\mu_o^2\,|A_{ci}|^2\,L_r\,I_{ci}\,|H_c|^2}{\rho_{ci}\,|\alpha_c|^2\,|\gamma_{ci}|^2\,(ch\,\alpha_{cs}\,b_{ci} - \cos\alpha_{cr}\,b_{ci})}\left(\frac{sh\,\alpha_{cs}\,b_{ci}}{\alpha_{cs}} + \frac{\sin\alpha_{cr}\,b_{ci}}{\alpha_{cr}}\right) \tag{D.33}$$

$$Q_{ci} = \frac{\mu_o\,\omega_o\,|A_{ci}|^2\,L_r\,|H_c|^2}{ch\,\alpha_{cs}\,b_{ci} - \cos\alpha_{cr}\,b_{ci}}\left[\frac{sh\,\alpha_{cs}\,b_{ci}}{\alpha_{cs}}\left(\frac{I_{ci}}{|\gamma_{ci}|^2} + \frac{J_{ci}}{|\alpha_c|^2}\right) + \frac{\sin\alpha_{cr}\,b_{ci}}{\alpha_{cr}}\left(\frac{J_{ci}}{|\alpha_c|^2} - \frac{I_{ci}}{|\gamma_{ci}|^2}\right)\right] \tag{D.34}$$

$$P_{cj} \doteq \frac{2\rho\,|A_{ci}|^2\,L_r\,I_{ci}\left(sh\,\frac{\ell_c}{\delta_c} + \sin\frac{\ell_c}{\delta_c}\right)|H_c|^2}{\delta_c\,|\gamma_{ci}|^2\,g\left(ch\,\frac{\ell_c}{\delta_c} - \cos\frac{\ell_c}{\delta_c}\right)} \tag{D.35}$$

$$Q_{cj} = \frac{\mu_o\,\mu_c\,\omega_o\,|A_{ci}|^2\,L_r\,|H_c|^2}{ch\,\frac{\ell_c}{\delta_c} - \cos\frac{\ell_c}{\delta_c}}\left[\frac{I_{ci}\,\delta_c}{|\gamma_{ci}|^2}\left(sh\,\frac{\ell_c}{\delta_c} - \sin\frac{\ell_c}{\delta_c}\right) + \frac{J_{ci}\,\delta_c^3}{2}\left(sh\,\frac{\ell_c}{\delta_c} + \sin\frac{\ell_c}{\delta_c}\right)\right] \tag{D.36}$$

d'où :

$$R_{ci} = \frac{P_{ci}}{|I_c|^2} \qquad (\text{pour } i = 1,2) \tag{D.37}$$

$$X_{ci} = \frac{Q_{ci}}{|I_c|^2} \qquad (\text{pour } i = 1,2) \tag{D.38}$$

$$R_{cj} = \frac{Q_{cj}}{|I_c|^2} \qquad (\text{pour } j = 5,6) \tag{D.39}$$

$$X_{cj} = \frac{Q_{cj}}{|I_c|^2} \qquad (\text{pour } j = 5,6) \tag{D.40}$$

D.2.3 - Région 8.

On pose, avec $H_{dz\,80}$ donné par (22) :

(D.42) $$P_{d8} = \frac{\rho L_r t_d k_{r\mu}}{g \delta_d} \left| H_{dz\,80} \right|^2$$

(D.43) $$Q_{d8} = \frac{\rho L_r t_d k_{x\mu}}{g \delta_d} \left| H_{dz\,80} \right|^2$$

avec, comme en D.1.3., $\mu = 1$ ou 2 et k_{r1}, k_{x1}, k_{r2}, k_{x2} tirés de l'annexe A, où l'on aura remplacé D_r par D_d et δ par δ_d.

D'où, utilisant (22), (27), (28), (D.42), (D.43)

(D.44) $$R_{d8} = \frac{P_{d8}}{|I_c|^2}$$

(D.45) $$X_{d8} = \frac{Q_{d8}}{|I_c|^2}$$

en notant que R_{d8} et X_{d8} n'ont pas même expression pour $\mu = 1$ et $\mu = 2$.

D.2.4 - Influence des fuites de bec d'encoche (Région " o ")

De la même manière qu'en D.1.4., on aura :

$$P_{co} = 0,2$$

$$\overline{H}_{co} = \frac{2 A_{c1} H_c \left[sh\, \gamma_{c1} h_{c1} + k_{c1} ch\, \gamma_{c1} h_{c1} \right]}{b_{c1} \alpha_c^2}$$

$$Q_{co} = \mu_o \omega_o L_r b_{c1}^2 \left| \overline{H}_{czo} \right|^2 P_{co}$$

d'où enfin :

(D.46) $$X_{co} = \frac{Q_{co}}{|I_c|^2}$$

D.3. PAS DENTAIRE MUNI DE CALES MAGNETIQUES OU DEPOURVU DE CALES (dans la zone polaire seulement).

On considérera les configurations suivantes :

a) Lorsque les surfaces polaires sont munies de cales magnétiques, celles-ci sont nécessairement associées à des amortisseurs. Mais on considérera que ces derniers jouent un rôle négligeable soit en ce qui concerne les transmittances, soit en ce qui concerne les pertes en régime inverse, et que leur rôle est surtout d'assurer le transport du courant du rotor vers les frettes. Si, en outre, le rotor est muni de rainures transversales d'équilibrage (voir définition en D.3.2.), ce qui ne peut se produire qu'en bipolaire ($p=1$), on considérera que les amortisseurs shuntent lesdites rainures et on négligera aussi la présence des rainures. En conséquence, on considérera que des surfaces polaires munies de cales magnétiques correspondent à une zone polaire entièrement massive et sans coupure transversale.

b) Lorsque les surfaces polaires sont dépourvues de cales, ou bien elles sont entièrement compactes, c'est-à-dire sans rainures transversales d'équilibrage, ce qui se produit notamment en quadripolaire ($p = 2$) et on est ramené au cas a) ci-dessus ;

c) Ou bien elles sont munies de rainures transversales d'équilibrage et dans ce cas les courants doivent nécessairement contourner ces dernières, par dessous et par les côtés, ce qui entraîne une modification tout à fait notable des pertes locales et des résistances globales.

En conséquence, notre première approche théorique considérera les deux cas suivants :

D.3.1 - Surfaces polaires considérées comme complètement lisses.

Ce cas correspond aux cas a) et b) ci-dessus, c'est-à-dire :

- soit cales magnétiques,
- soit absence d'entailles transversales,

une seule de ces conditions étant suffisante.

La théorie est alors extrêmement simple, car la zone c de la fig. 10 disparaît. Seule est alors à prendre en considération la zone d, à la surface de laquelle on applique le champ tangentiel H_c.

Les calculs de la méthode générale sont modifiés seulement à partir de la formule (29).

La formule (29) doit maintenant s'écrire :

(D.47) $$Z_{ct} = R_{d8} + j X_{d8}$$

Mais maintenant les expressions (D.41) à (D.45) doivent être modifiées comme suit :

$H_{d_3 80}$ est maintenant identique à H_c ; les expressions (D.44) et (D.45) sont formellement inchangées, mais (D.42) et (D.43) deviennent simplement

(D.49) $$P_{d8} = \frac{\rho L_r t_d k_{r\mu}}{g \delta_d} \left| H_c \right|^2$$

(D.50) $$Q_{d8} = \frac{\rho L_r t_d k_{x\mu}}{g \delta_d} \left| H_c \right|^2$$

Dans ces deux dernières expressions, t_d a une valeur arbitraire, ce qui signifie simplement que P_{d8} et Q_{d8}, R_{d8} et X_{d8} sont afférents à un secteur cylindrique d'angle arbitraire ; il convient de remplacer t_{c_1} par t_d dans (27), (38) et (F. 19). On remarque que t_d s'élimine lors du calcul du schéma équivalent.

Par ailleurs, comme en D.1.3., $\mu = 1$ ou 2 et k_{r1}, k_{x1}, k_{r2} et k_{x2} sont tirés de l'annexe A, où l'on aura conservé D_r et remplacé δ par δ_d.

Lorsqu'on s'intéresse aux pertes en inverse, les modifications à apporter au chapitre 5 sont les suivantes :

Il faut maintenant considérer que toutes les pertes données par (69) à (72) sont nulles. Par contre, on doit rétablir les pertes de la région 8. Ces pertes sont données, par pas dentaire, par (D.49) avec H_c remplacé par $A_r i_2$ et l'extension à toute la zone polaire se fait en multipliant par

$$\frac{2\mu \theta_c D_r}{t_d}$$

(ce qui élimine t_d)

Il faut en outre éliminer g (ou, ce qui revient au même, multiplier par $g = 2$) puisqu'on s'intéresse aux pertes rotor .

L'équation (73) donnant les pertes totales de la zone polaire, doit donc être remplacée par :

(D.51) $$\mathcal{P}_c = \mathcal{P}_{d8} = \frac{2\mathcal{P}\theta_c \rho L_r D_r k_{r\mathcal{P}} (A_r i_2)^2}{\delta_d}$$

D.3.2 - Surfaces polaires comportant des rainures transversales d'équilibrage non shuntées.

Les turbo-alternateurs bipolaires présentent naturellement une anisotropie de flexion, due à la présence des encoches bobinées, du fait que le rotor est plus "flexible" lorsque l'axe od est horizontal, comme c'est visible sur la fig. 1.

Le procédé classique utilisé actuellement pour annuler cette anisotropie sans réduire la section utile de passage du flux par les pôles consiste à pratiquer à certains emplacements disposés sur la longueur de la machine, des rainures transversales dont la trace en section droite est hachurée sur la fig. D.1.

Lorsque ces rainures existent et ne sont pas shuntées par des amortisseurs, on adoptera la méthode très simplifiée suivante pour leur prise en compte, et ceci seulement si on s'intéresse à l'influence globale des rainures sur la résistance du rotor ou sur les pertes ; l'étude de l'influence locale n'a pas été entreprise dans le cadre du présent travail.

Dans cette étude très simplifiée, on caractérisera les entailles :

- par la section d'entaille s_e

- par le nombre d'entailles n_e disposées le long d'un pôle.

On fera ensuite l'hypothèse, que globalement, l'entaille peut être assimilée à un rectangle curviligne (fig. D.2) de section s_e, de développement $t_{\mathcal{P}}$ ($t_{\mathcal{P}}$ est la largeur de la zone polaire) avec, donc :

(D.52) $$t_{\mathcal{P}} = D_r \theta_c$$

et de profondeur moyenne

(D.53) $$h_e = \frac{s_e}{t_{\mathcal{P}}}$$

(car $h_e \ll \frac{D_r}{2}$).

En section longitudinale cette fois, les fig. D.3 a et D. 3b montrent le trajet emprunté par les courants en l'absence et en présence d'entailles.

Il est visible que la présence des entailles conduit à un accroissement de résistance, nous allons évaluer ce coefficient d'accroissement. Nous pouvons raisonner sur un développement périphérique quelconque, puisqu'il s'agit d'évaluer un accroissement relatif.

Choisissons donc la largeur t_{fr} définie par (D. 52)

Appelons

- R_1 la résistance du fer en l'absence d'entailles, c'est-à-dire correspondant aux trajets de la fig. D.3 a

(D.54)
$$R_1 = \frac{\rho L_r}{\delta_d t_{fr}}$$

avec :

(D.55)
$$\delta_d = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_o \mu_d \omega_o g}}$$

R_2 la résistance des mêmes trajets de fer, mais en présence des entailles (trajets horizontaux de la fig. D. 3 b)

(D.56)
$$R_2 = \frac{\rho L_r}{\delta'_d t_{fr}}$$

On peut considérer que la longueur est inchangée, soit L_r, par contre, la profondeur de pénétration est modifiée, δ_d devient δ'_d ; la modification étant étudiée plus loin.

- Enfin appelons R_e la résistance des entailles (trajets verticaux de la fig. D 3 b).

Cette résistance correspond à une résistivité ρ

à une longueur $2 n_e h'_e$

avec $h'_e = h_e - \delta'_d$ si $h_e > \delta'_d$

$h'_e = 0$ si $h_e \leq \delta'_d$

à une section $\delta_e t_{fr}$

δ_e étant la profondeur de pénétration le long des faces de l'entaille

(D.57)
$$\delta_e = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_o \mu_e \omega_o g}}$$

μ_e étant la perméabilité relative du fer le long des faces de l'entaille, nous discuterons plus loin des valeurs relatives de μ_d et μ_e .

Il vient alors :

(D.58)
$$R_e = \frac{2\rho n_e h'_e}{\delta_e t_\mu}$$

La résistance totale sans entailles est R_1.

La résistance totale avec entailles est $R_2 + R_e$.

La profondeur de pénétration δ'_d est alors telle que

(D.59)
$$\frac{\delta'_d}{\delta_d} = \sqrt{\frac{R_2 + R_e}{R_1}}$$

L'ensemble des relations (D.56), (D.58) et (D.59) peut être maintenant aisément résolu, puisqu'il ne comporte que les trois inconnues δ'_d , R_2 et R_e .

En définitive, la résistance totale des pôles, calculée en l'absence de rainures, doit être multipliée par le rapport :

$$\frac{R_2 + R_e}{R_1}$$

les quantités $\frac{R_2}{R_1}$ et $\frac{R_e}{R_1}$ indiquant les contributions respectives des régions entre rainures et des rainures elles-mêmes.

Remarques complémentaires relatives au § D.3.2.

1/ On n'a pas tenu compte de la courbure ; c'est inutile dans la mesure où :

$$h_e \ll \frac{D_r}{2}$$

et où l'influence des rainures disparaît lorsque $\delta'_d > h_e$

2/ Les calculs précédents s'appliquent sans changement à la majoration des pertes en régime inverse : les pertes calculées sans rainures doivent être multipliées par :

$$\frac{R_2 + R_e}{R_1}$$

et notamment la quantité $\frac{R_e}{R_1}$ indiquera les pertes dissipées dans la région des rainures ; malheureusement notre modèle est trop simple pour indiquer comment les pertes se répartissent sur le pourtour réel de la rainure (fig. D.1).

3/ La formule (D.59) implique qu'on admet que la perméabilité relative μ_d de la surface polaire est la même avec ou sans rainures. Cette hypothèse est surtout valable dans le cas d'application le plus intéressant de cette correction, à savoir les pertes en inverse, puisqu'alors on raisonne à H_c constant. Pour les autres cas, l'erreur commise du fait de cette hypothèse restera toujours faible. Il faut enfin noter que μ_e doit correspondre à l'absence de saturation, puisqu'intervenant toujours dans une zone à champ faible, sauf, évidemment, si on étudie les petites oscillations superposées à un régime déjà saturé. Mais dans ce cas on suppose dans tout le pôle une perméabilité uniforme (égale à la perméabilité incrémentale) et alors: $\mu_e = \mu_d$.

Figure D 1

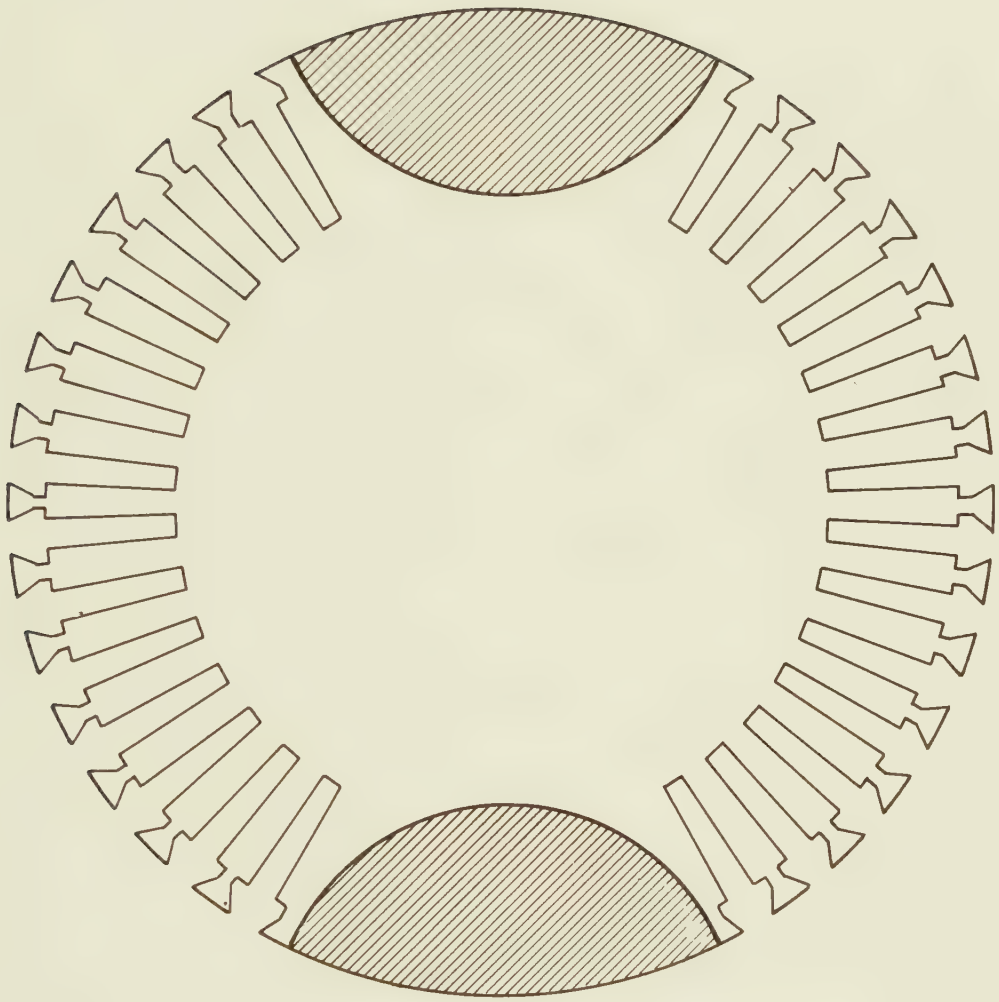


Fig. D1 . FORME ET EMPLACEMENT DES RAINURES D'EQUILIBRAGE

Figure D 2

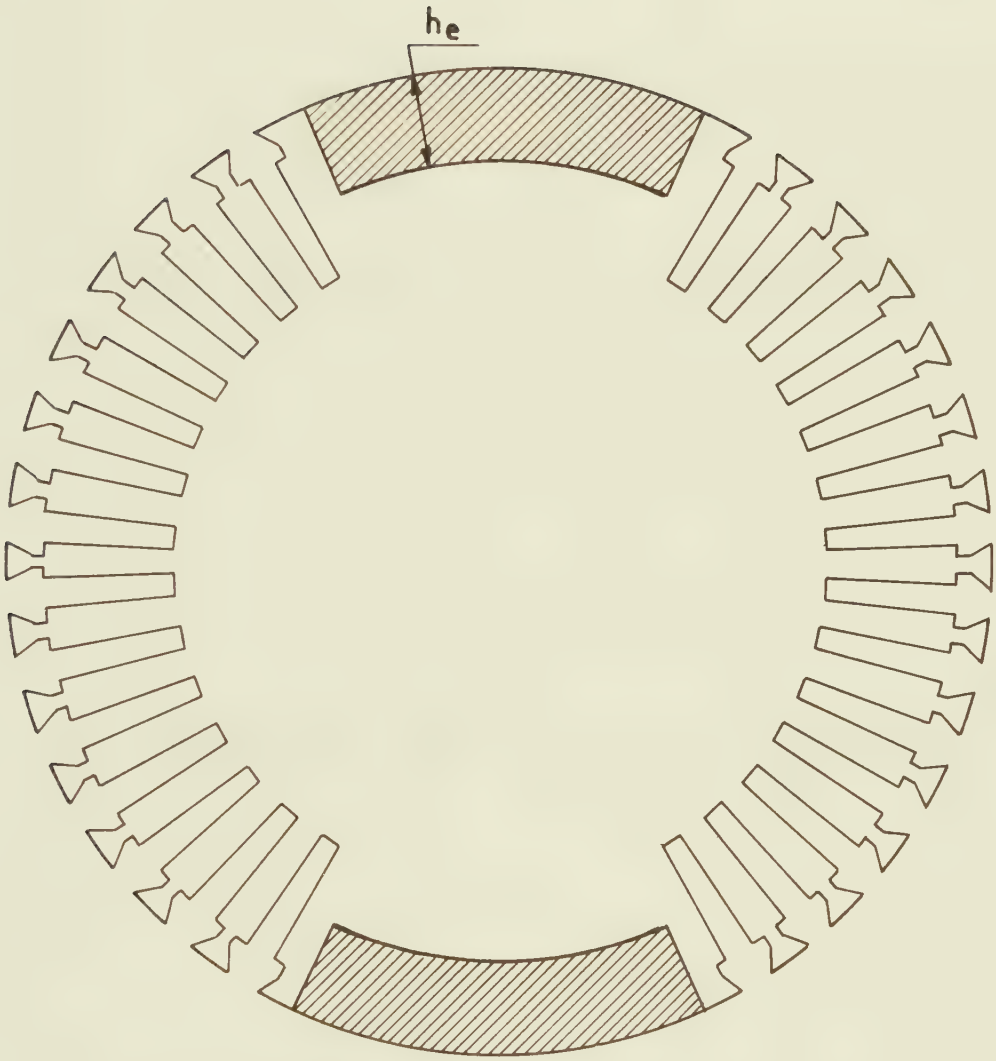
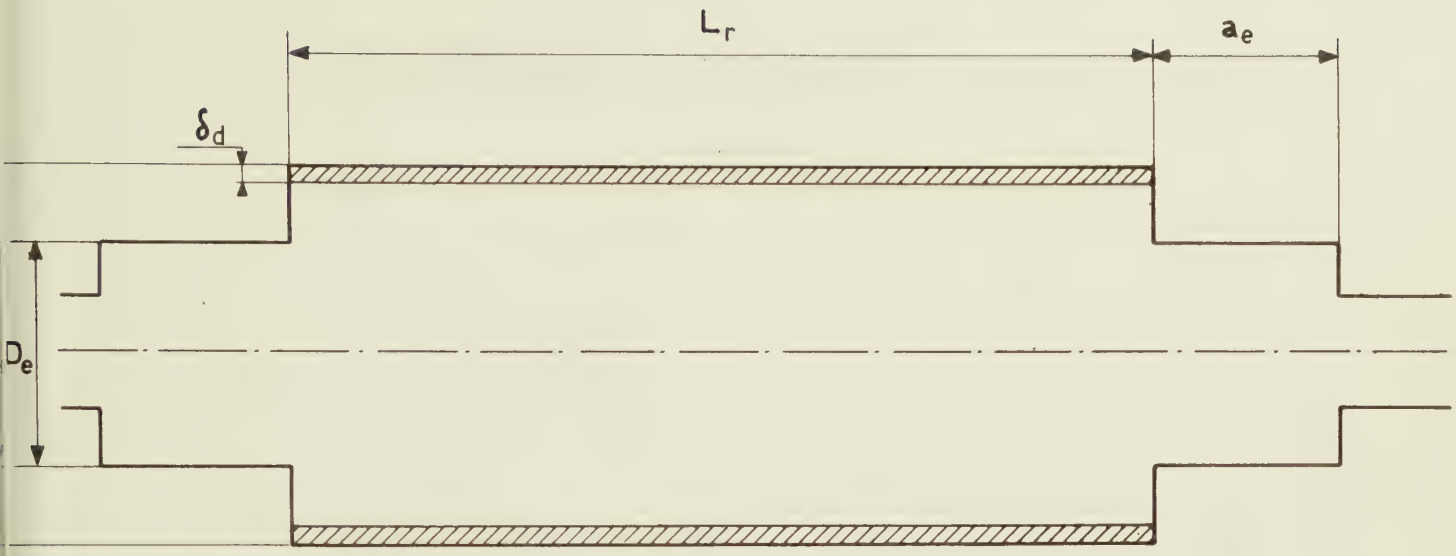
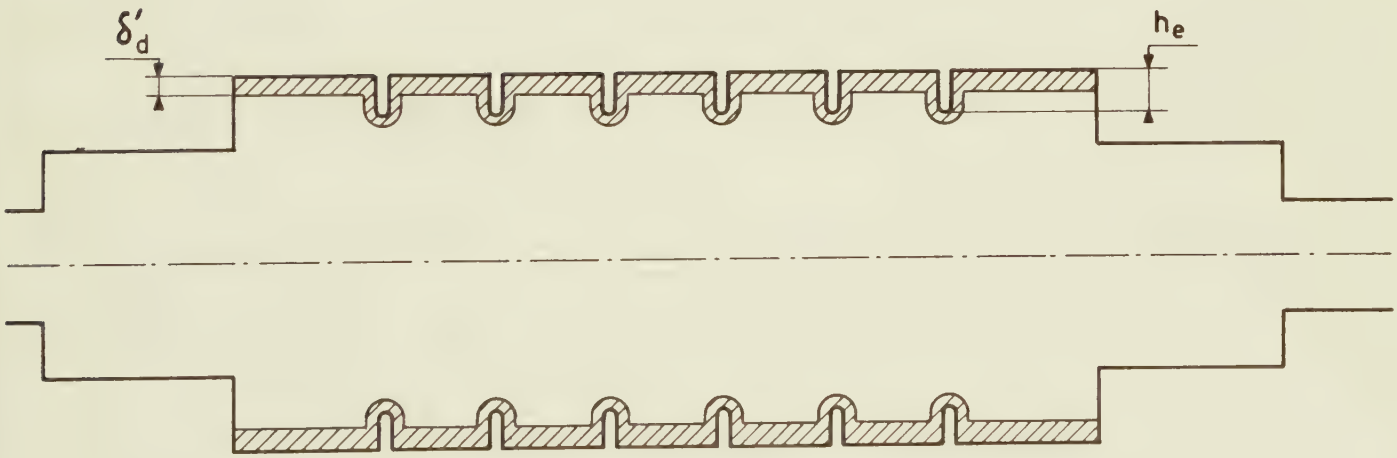


Fig.D2 – ASSIMILATION DES RAINURES D'EQUILIBRAGE
A DES RECTANGLES CURVILIGNES

Figure D 3



(a)



(b)

Fig. D3. TRAJETS DES COURANTS SUPERFICIELS DE LA ZONE POLAIRE

(a). EN L'ABSENCE DE RAINURES D'EQUILIBRAGE

(b). EN PRESENCE DE RAINURES D'EQUILIBRAGE NON SHUNTEES

Annexe E

PRISE EN COMPTE DES EFFETS D'EXTREMITE

E.1. GENERALITES - BUTS POURSUIVIS.

Alors que les circuits inducteur ou induit, constitués de spires fermées, donnent lieu à des courants suivant des trajets bien déterminés, la fermeture des circuits constitués par les parties massives du rotor (fer et cales notamment) doit faire l'objet d'une étude spéciale. Diverses modalités technologiques peuvent être adoptées par le constructeur. La technique la plus courante consiste à utiliser, pour refermer ces courants, les frettes ou anneaux de serrage, destinées à protéger les têtes de bobines contre la force centrifuge (fig. 2). La transmission du courant depuis les parties massives du rotor vers les frettes doit être assurée par des éléments conducteurs garantissant partout un bon contact électrique : c'est la principale raison d'être des amortisseurs, bandes de cuivre situées sous les cales, et qui se prolongent sous les frettes. La bonne qualité des contacts est assurée grâce à la force centrifuge et peut être améliorée aux endroits critiques par des revêtements de surface appropriés.

Etant donné la valeur élevée du rapport de la longueur au pas polaire dans les turbo-alternateurs de grande puissance, les effets d'extrémité ne jouent pas un rôle prépondérant dans les paramètres transitoires de ces machines. Par contre, les développements ci-dessus montrent qu'ils jouent un rôle important dans les phénomènes énergétiques liés à la fermeture de courants parasites ; parmi ces derniers, il faut citer en tout premier lieu les courants inverses, engendrés par les dissymétries électriques permanentes ou transitoires que subit l'alternateur et qui entraînent au rotor des courants de pulsation $2\omega_o$ ($g = 2$).

C'est la raison pour laquelle nous avons surtout cherché à évaluer l'influence des effets d'extrémités sur les pertes actives (ou sur les résistances) ; nous n'avons pas cherché à évaluer leur influence sur les réactances, sachant que cette influence est d'une part faible en raison de l'explication ci-dessus, basée sur le rapport de la longueur au pas polaire et d'autre part sans conséquence énergétique.

Négliger l'influence des extrémités sur les réactances revient à supposer que la distorsion des courants, due aux effets d'extrémités, n'engendre pas une perturbation notable du champ magnétique. Cette hypothèse nous sera très utile pour obtenir une formulation mathématique simple.

E.2. METHODE ADOPTEE.

La méthode consiste à évaluer un coefficient correcteur, soit de résistance, soit de pertes, destiné à affecter les résultats de tous les calculs faits précédemment dans l'hypothèse de fermeture idéale des courants aux extrémités (hypothèse qui avait permis de notablement simplifier le problème, d'une part en le rendant bi-dimensionnel, d'autre part en éliminant le potentiel électrostatique lors de l'intégration des équations de Maxwell)

On est amené à considérer deux sortes de zones : les zones voisines de la surface, dont les courants se referment par les frettes, et les zones profondes, dont les courants se referment par l'arbre. On traitera tout d'abord le premier problème, de loin le plus complexe, et on considérera le deuxième comme un cas particulier simple du premier.

Pour simplifier, on affectera les zones a et c (fig. 10) à la première catégorie, les zones b et d à la deuxième catégorie.

En ce qui concerne les lois de distribution des grandeurs électromagnétiques avec l'angle, et du fait que la structure du rotor n'est pas la même dans les zones a et b d'une part c et d d'autre part, on a été amené à adopter la simplification suivante, dont les conséquences ne sont pas gênantes du fait qu'on cherche ici à évaluer un simple terme correcteur.

On suppose que les grandeurs électromagnétiques (et notamment le champ électromoteur) suivent une loi sinusoïdale en fonction de l'angle (l'angle donne lieu à la coordonnée z en représentation développée, voir fig. E.1 et E.2). Cette hypothèse nécessite qu'on affecte au rotor une "résistance de surface" indépendante de l'angle. Cette résistance sera prise comme moyenne pondérée des influences des zones a et b d'une part, c et d d'autre part.

E.3. EFFETS D'EXTREMITE RELATIFS AUX PHENOMENES VOISINS DE LA SURFACE DU ROTOR.

Considérons (fig. E.1 et E.2) la vue en surface développée d'un pas polaire du rotor, au voisinage de la surface ; les coordonnées sont les mêmes que pour l'étude générale : x pour la direction longitudinale, z pour la direction tangentielle.

La fig. E.1 est relative à l'hypothèse où on néglige les effets d'extrémité. La fig. E.2 est relative au cas où on les prend en compte : on y voit apparaître la longueur a_f des frettes.

Dans les deux cas, on considérera que la surface est sollicitée par une même induction radiale (donc dirigée selon la coordonnée y) à distribution indépendante de x (mais nulle pour :

$$|x| > \frac{L_r}{2}) ,$$

à distribution sinusoïdale en z

$$(\text{période } \frac{\pi D_r}{p}),$$

et à la loi de variation sinusoïdale dans le temps (la pulsation ω est arbitraire car elle s'élimine lors de l'établissement des coefficients correcteurs).

L'allure des lignes de courant a été dessinée fig. E.1 et E.2., pour mieux faire comprendre le principe de la comparaison : il consiste à étudier uniquement le phénomène lié aux résistances de surface, négligeant donc l'influence de la distorsion des courants sur l'induction sollicitante, et ceci en vertu de l'hypothèse formulée à la fin du § E.1.

On remarquera enfin qu'on n'a pas fait de distinction entre la zone polaire et la zone bobinée ; ces deux zones ont cependant des propriétés de surface différentes et devraient normalement donner lieu à une mise en équations distincte. Afin de ne pas trop compliquer un problème qui , somme toute, ne concerne que des termes correctifs, on a effectué la mise en équations sans distinguer ces deux zones, mais par la suite on adopte des paramètres qui sont des moyennes pondérées des paramètres caractéristiques de l'une et l'autre zone.

E.3.1 - Paramètres caractéristiques du phénoène et équations générales.

E.3.1.1 - Résistances de surface.

Le rotor et les frettes sont caractérisés par leur résistance par unité de surface, exprimées en ohms. La manière d'évaluer ces résistances sera expliquée au § E.3.4.

En ce qui concerne les frettes, la résistance par unité de surface est supposée la même dans les directions x et z, soit R_a.

En ce qui concerne le rotor, on considère que la résistance par unité de surface n'est pas la même dans la direction x (soit R_x) et dans la direction z (soit R_z) du fait que dans la direction x les matériaux se trouveront en parallèle et dans la direction z en série-parallèle.

E.3.1.2 - Densités superficielles de courant.

Aux résistances par unité de surface sont associées les densités superficielles de courant exprimées en Am^{-1}:

J_{ax} et J_{az} pour les frettes,

J_{rx} et J_{rz} pour le rotor.

Le produit RJ est égal au champ électrique et on voit qu'il s'exprime bien en Vm^{-1}.

E.3.1.3 - Equations générales.

Conformément aux hypothèses précédentes, on suppose que l'induction suit la loi, sinusoïdale en fonction du temps, représentée par le nombre complexe :

(E.1)
$$\begin{cases} B(z) = B_0 \cos \dfrac{2\pi z}{D_r} & \left(|x| \leq \dfrac{L_r}{2}\right) \\ B = 0 & \left(|x| > \dfrac{L_r}{2}\right) \end{cases}$$

d'où les équations :

- conservation du courant dans le fer :

(E.2)
$$\frac{\partial J_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial J_{rz}}{\partial z} = 0$$

- loi de Faraday dans le fer, d'après (E.1) :

(E.3)
$$R_x \frac{\partial J_{rx}}{\partial z} - R_z \frac{\partial J_{rz}}{\partial x} = -j\omega B_0 \cos \frac{2\pi z}{D_r}$$

- conservation du courant dans les frettes :

(E.4)
$$\frac{\partial J_{ax}}{\partial x} + \frac{\partial J_{az}}{\partial z} = 0$$

- loi de Faraday dans les frettes (résistance isotrope et absence de champ électromoteur)

(E.5)
$$\frac{\partial J_{ax}}{\partial z} - \frac{\partial J_{az}}{\partial x} = 0$$

Les conditions aux limites seront étudiées selon les cas particuliers.

Nous allons maintenant résoudre ces équations, d'une part en négligeant les effets d'extrémité, et d'autre part en en tenant compte. Conformément à nos hypothèses, le 2ème membre de l'équation (E.3) sera le même dans les deux cas, et servira de base à la comparaison. Nous dirons que la comparaison est effectuée "à égalité de f.é.m."

E.3.2 - Calcul des pertes en négligeant les effets d'extrémité.

Dans cette hypothèse, illustrée fig. E.1, seul existe J_{rx} obéissant aux équations (E.2) et (E.3). Nous caractérisons cette hypothèse par l'indice o d'où :

(E.6)
$$J_{rx_o} = -\frac{1}{R_x}\left(\frac{j\omega B_o D_r}{2p}\right)\sin\frac{2pz}{D_r}$$

d'où les pertes totales pour toute la surface du rotor :

$$P_o = \iint_S R_x \left| J_{rx_o} \right|^2 dS$$

$$P_o = \left|\frac{\omega B_o D_r}{2p}\right|^2 \frac{1}{R_x}\int_{-\frac{L_r}{2}}^{+\frac{L_r}{2}} dx \int_0^{\pi D_r} \sin^2\frac{2pz}{D_r}\, dz$$

(E.7)
$$P_o = \left|\frac{\omega B_o D_r}{2p}\right|^2 \frac{\pi D_r L_r}{2R_x}$$

E.3.3 - Calcul des pertes en tenant compte des effets d'extrémité.

Aux équations (E.2) à (E.5), il faut maintenant ajouter les conditions aux limites et les conditions de symétrie (cf. fig. E.2)

- pour $x = 0$ $\qquad J_{rz} = 0$

- pour $x = \frac{L_r}{2}$ $\qquad \begin{cases} J_{ax} = J_{rx} \\ R_z J_{rz} = R_a J_{az} \end{cases}$

(à la frontière de deux milieux de conductivité différente, conservation de la composante normale de la densité de courant et de la composante tangentielle du champ électrique)

- pour $x = \frac{L_r}{2} + a_f$ $\qquad J_{ax} = 0$

d'où la solution, en posant :

(E.8) $$\sqrt{R_x / R_z} = k$$

(E.9) $$R_x / R_a = k_a$$

et tous calculs faits :

(E.10)

$$\left\{\begin{array}{l}
J_{ax} = \dfrac{-j\omega B_o D_r k_a \, th\,(k\pi L_r/D_r)\, sh\, \dfrac{2\pi(L_r/2 + a_f - x)}{D_r} \sin \dfrac{2\pi z}{D_r}}{2\pi R_x \left(k + k_a \, th \dfrac{2\pi a_f}{D_r} \, th \dfrac{k\pi L_r}{D_r}\right) ch \dfrac{2\pi a_f}{D_r}} \\[2ex]
J_{az} = \dfrac{j\omega B_o D_r k_a \, th \dfrac{k\pi L_r}{D_r} \, ch \dfrac{2\pi(L_r/2 + a_f - x)}{D_r} \cos \dfrac{2\pi z}{D_r}}{2\pi R_x \left(k + k_a \, th \dfrac{2\pi a_f}{D_r} \, th \dfrac{k\pi L_r}{D_r}\right) ch \dfrac{2\pi a_f}{D_r}} \\[2ex]
J_{rx} = \dfrac{j\omega B_o D_r}{2\pi R_x} \left[\dfrac{k \, ch \dfrac{2k\pi x}{D_r}}{\left(k + k_a \, th \dfrac{2\pi a_f}{D_r} \, th \dfrac{k\pi L_r}{D_r}\right) ch \dfrac{k\pi L_r}{D_r}} - 1 \right] \sin \dfrac{2\pi z}{D_r} \\[2ex]
J_{rz} = \dfrac{j\omega B_o D_r k^2 \, sh \dfrac{2k\pi x}{D_r} \cos \dfrac{2\pi z}{D_r}}{2\pi R_x \left(k + k_a \, th \dfrac{2\pi a_f}{D_r} \, th \dfrac{k\pi L_r}{D_r}\right) ch \dfrac{k\pi L_r}{D_r}}
\end{array}\right.$$

(N.B.- Les expressions de J_{ax} et de J_{az} ne sont valables que pour la frette située à $x > 0$. Les expressions pour $x < 0$ s'obtiendraient en changeant x en $-x$, mais il est inutile de les écrire puisqu'il suffit de calculer les pertes pour $x > 0$ et de multiplier par 2).

Les pertes s'obtiennent par une intégrale de surface.

Pour calculer la puissance dissipée dans les frettes, soit P_a, il suffit d'intégrer $R_a \left(|J_{ax}|^2 + |J_{az}|^2 \right)$ de 0 à πD_r en z, et de $\frac{L_r}{2}$ à $\frac{L_r}{2} + a_f$ en x, puis de multiplier par 2 pour tenir compte de la frette située à $x < 0$ d'où, en posant :

$$A = k + k_a \, th \frac{2p a_f}{D_r} \, th \frac{k p L_r}{D_r} \tag{E.11}$$

$$P_a = \left| \frac{\omega B_o D_r}{2p} \right|^2 \frac{\pi D_r^2 k_a \, th^2 \frac{k p L_r}{D_r} \, th \frac{2p a_f}{D_r}}{2 R_x p A^2} \tag{E.12}$$

Pour calculer la puissance dissipée à la surface du rotor, soit il suffit d'intégrer $\left(R_x |J_{rx}|^2 + R_z |J_{rz}|^2 \right)$ de 0 à πD_r en z et de $-\frac{L_r}{2}$ à $+\frac{L_r}{2}$ en x, d'où :

$$P_r = \left| \frac{\omega B_o D_r}{2p} \right|^2 \left(\frac{\pi D_r^2 k \, th \frac{k p L_r}{D_r}}{2 R_x p A^2} - \frac{\pi D_r^2 \, th \frac{k p L_r}{D_r}}{R_x p A} + \frac{\pi D_r L_r}{2 R_x} \right) \tag{E.13}$$

La prise en compte des effets d'extrémité sera par la suite basée essentiellement sur la comparaison de P_a (E.12) et P_r (E.13) avec P_o (E.7).

Dans cette comparaison les résistances de surface disparaissent, et il ne subsiste que les coefficients k (E.8) et k_a (E.9). Il s'agit donc surtout maintenant d'évaluer correctement les rapports de résistances, plutôt que les résistances elles-mêmes.

E.3.4 - Calcul des résistances de surface relatives aux phénomènes voisins de la surface.

Le calcul de la résistance de surface R_a de la frette est assez facile, du fait qu'elle fait intervenir deux enveloppes en parallèle (la frette et les amortisseurs) où les courants se partagent essentiellement au prorata des conductances.

Par contre, les deux résistances de surface R_x et R_z du fer font intervenir les phénomènes de pénétration, et ne peuvent être évaluées sans précaution à partir du simple volume des matériaux en cause.

E.3.4.1 - Résistance de surface des frettes

(E.14) $$R_a = \frac{1}{e_a/\rho_a + e_f/\rho_f}$$

avec :

ρ_a = résistivité des amortisseurs sous la frette

$e_a = \inf(e_{af}, \delta_{af})$ avec

- e_{af} = épaisseur des amortisseurs sous la frette
- $\delta_{af} = \sqrt{\frac{2\rho_a}{\mu_o \omega_o g}}$

ρ_f = résistivité de la frette

$e_f = \inf(e_{ff}, \delta_f)$ avec

- e_{ff} = épaisseur de la frette
- $\delta_f = \sqrt{\frac{2\rho_f}{\mu_o \omega_o g}}$

(frette supposée amagnétique)

Remarque 1 - Lorsque la technologie des amortisseurs sous la frette fait que ceux-ci forment un cylindre électriquement continu dans toutes les directions, ce qui implique le recouvrement de bandes ou de lamelles, ou encore le raccordement par brasure, soudure, etc ... on prendra pour longueur effective de la frette a_f la longueur du cylindre amortisseur sous la frette ; par contre, lorsque le cylindre amortisseur n'est pas électriquement continu dans la direction z (tangentielle) on prendra $\rho_a = \infty$ mais pour a_f on prendra la longueur réelle de la frette.

Remarque 2 - Pour tenir compte du cas où la frette serait électriquement isolée du rotor, et où il n'y aurait pas de circuit prévu pour la fermeture des courants, il suffit de faire : $R_a = \infty$

E.3.4.2 - Résistance de surface R_z du rotor dans la direction z.

Cette résistance est obtenue en faisant une moyenne entre R_{az}, résistance dans la zone a, et R_{cz} résistance dans la zone c (fig.10).

Nous considérons en premier lieu le cas où la zone polaire est munie de cales amagnétiques. Le raisonnement est alors le même pour la zone a et la zone c :

La résistance R_z fait intervenir la résistance transversale des extrémités de dents, en série avec deux résistances elles-mêmes en parallèle : la résistance transversale des cales et celle des amortisseurs.

L'inconvénient, surtout aux fréquences élevées, est qu'à la profondeur de l'amortisseur le champ, donc le courant, peut être déjà bien affaibli, d'où une évaluation par excès de l'influence conductrice des amortisseurs dans la direction z. Nous calculons cependant R_z par un procédé de mises en série-parallèle, du fait qu'aux fréquences élevées :

- si les cales sont bonnes conductrices les dents ont le rôle prépondérant dans R_z,
- si les cales sont très résistantes, même à $g = 2$, les amortisseurs participent au courant, et de toute façon l'erreur ne peut être grande.

On adopte donc pour R_z la loi des circuits en série-parallèle ; on pose :

$$e_{a1} = \inf(h_{a1}, \delta_{a1}) \quad \text{avec} \quad \delta_{a1} = \sqrt{\frac{2\rho_{a1}}{\mu_0 \omega_0 g}}$$

$$e_{a2} = \inf(h_{a2}, \delta_{a2}) \quad \text{avec} \quad \delta_{a2} = \sqrt{\frac{2\rho_{a2}}{\mu_0 \omega_0 g}}$$

$$e_{a4} = \inf(h_{a1} + h_{a2}, \delta_a) \quad \text{avec} \quad \delta_a = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \mu_a \omega_0 g}}$$

$$e_{c1} = \inf(h_{c1}, \delta_{c1}) \quad \text{avec} \quad \delta_{c1} = \sqrt{\frac{2\rho_{c1}}{\mu_0 \omega_0 g}}$$

$$e_{c2} = \inf(h_{c2}, \delta_{c2}) \quad \text{avec} \quad \delta_{c2} = \sqrt{\frac{2\rho_{c2}}{\mu_0 \omega_0 g}}$$

$$e_{c4} = \inf(h_{c1} + h_{c2}, \delta_c) \quad \text{avec} \quad \delta_c = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \mu_c \omega_0 g}}$$

On obtient alors facilement :

(E.15)
$$R_{az} = \frac{1}{t_{a1}} \left[\frac{1}{\frac{e_{a1}}{\rho_{a1} b_{a1}} + \frac{e_{a2}}{\rho_{a2} b_{a2}}} + \frac{\rho l_a}{e_{a4}} \right]$$

(E.16)
$$R_{cz} = \frac{1}{t_{c1}} \left[\frac{1}{\frac{e_{c1}}{\rho_{c1} b_{c1}} + \frac{e_{c2}}{\rho_{c2} b_{c2}}} + \frac{\rho l_c}{e_{c4}} \right]$$

Dans le cas où la zone polaire est pourvue de cales magnétiques ou dépourvue de cales, on considère que la résistance est isotrope, ce qui entraîne :

(E.17) $$R_{c\zeta} = R_{cx}$$

On calculera R_{cx} dans ce cas, en E.3.4.3.

On adopte ensuite pour R_ζ la moyenne de $R_{a\zeta}$ et $R_{c\zeta}$, pondérée par les arcs correspondants, soit :

(E.18) $$R_\zeta = \frac{2p\theta_a}{\pi} R_{a\zeta} + \frac{2p\theta_c}{\pi} R_{c\zeta}$$

E.3.4.3 - Résistance de surface R_x du rotor dans la direction x.

Cette résistance est obtenue en faisant une moyenne entre R_{ax}, résistance dans la zone a, et R_{cx}, résistance dans la zone c, et nous considérons en premier lieu le cas où la zone polaire est munie de cales amagnétiques. Le raisonnement est alors le même pour la zone a et la zone c.

La résistance de surface dans la direction x fait intervenir en parallèle le fer des dents, les cales et les amortisseurs, mais ici il est impossible d'adopter la méthode du § E.3.4.2 : dans la présente mise en parallèle, les amortisseurs représentent une conductance notable, or aux glissements élevés le champ qui les atteint (donc le courant qui les parcourt) peut être énormément atténué, donc une mise en parallèle simpliste conduira dans ce cas à une conductance globale excessive. On a tourné la difficulté en utilisant les résultats de l'étude générale, qui donne justement la contribution de chaque région à la résistance de l'ensemble.

En Annexe D sont calculées les quantités R_{ak} $(1 \leq k \leq 7)$ et R_{ck} $(1 \leq k \leq 6)$ qui sont les résistances, par pas dentaire, des régions d'indice correspondants. Pour passer de ces quantités R_{ak} et R_{ck} aux résistances de surface cherchées, il suffit :

- de les ramener à la pulsation $\omega_o g$ des grandeurs rotoriques,

- de les ramener à l'unité de surface,

- d'éliminer l'influence des zones sous les encoches.

Pour les ramener à la pulsation du rotor, il convient de multiplier par g les puissances vues du stator.

Pour les ramener à l'unité de surface, il convient de les multiplier :

- par t_{a1} / L_r en ce qui concerne la zone a

- par t_{c1} / L_r en ce qui concerne la zone c

Pour éliminer l'influence des zones sous les encoches et pour obtenir les résistances afférentes aux seules régions qui nous intéressent, il convient de diviser la puissance par le carré du courant parcourant ces résistances, et non par le carré du courant total. La méthode ne conduisant pas naturellement, à ce partage de courant, on admettra, pour simplifier, qu'il se partage au prorata des conductances d'où l'intervention des coefficients de partage des courants k_{1a} et k_{1c} définis comme suit :

Soit R_{at} partie réelle de (26) de la 1ère partie

$$R_{at} = \sum_{k=1}^{7} R_{ak} + R_{b8}$$

tous les R_{ak} et R_{b8} étant calculés en annexe D, on pose :

(E.19) $$k_{1a} = R_{at} \Big/ \sum_{k=1}^{7} R_{ak}$$

d'où :

(E.20) $$R_{ax} = \frac{g k_{1a}^2 t_{a1}}{L_r} \sum_{k=1}^{7} R_{ak}$$

Soit R_{ct} partie réelle de (29) de la 1ère partie

$$R_{ct} = \sum_{k=1}^{6} R_{ck} + R_{d8}$$

tous les R_{ck} et R_{d8} étant calculés en annexe D, on pose :

(E.21) $$k_{1c} = R_{ct} \Big/ \sum_{k=1}^{6} R_{ck}$$

d'où :

(E.22) $$R_{cx} = \frac{g k_{1c}^2 t_{c1}}{L_r} \sum_{k=1}^{6} R_{ck}$$

Dans le cas où la zone polaire est pourvue de cales magnétiques ou dépourvue de cales on adopte l'expression évidente suivante pour R_{cx}

(E.23) $$R_{cx} = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\delta_d} & si \quad \delta_d \leqslant h_{a1} + h_{a2} \\ \dfrac{\rho}{h_{a1} + h_{a2}} & si \quad \delta_d > h_{a1} + h_{a2} \end{cases}$$

l'adoption de la hauteur $h_{a1} + h_{a2}$ comme limite à la profondeur des courants se refermant par la frette étant évidemment arbitraire ; sa seule justification est son homogénéité avec les autres cas traités, le fait que dans le cas le plus intéressant (g = 2) c'est toujours la première expression qu'il faudra adopter, et enfin la faible incidence numérique qu'aurait le choix à une autre limite sur le terme correcteur.

Enfin, au cas où la zone polaire comporte des rainures transversales non shuntées, il convient d'utiliser les résultats du § D.3.2., et de remplacer R_{cx} donné par (E.23) par :

$$\frac{R_2 + R_e}{R_1} R_{cx}$$

le coefficient majorateur de la résistance dans la direction x, soit :

$$\frac{R_2 + R_e}{R_1}$$

étant évalué au § D.3.2.

Par contre, dans ce cas il faudra conserver pour R_{cz} l'expression (E.17) avec R_{cx} donné par (E. 23), puisque les rainures transversales n'affectent pas la résistance de surface du rotor dans la direction z.

On adopte ensuite pour R_x la moyenne de R_{ax} et R_{cx}, pondérée par les arcs correspondants soit :

(E.24)
$$R_x = \frac{2p\theta_a}{\pi} R_{ax} + \frac{2p\theta_c}{\pi} R_{cx}$$

E.3.5 - Application aux calculs relatifs aux régimes inverses.

Le calcul des pertes en régime inverse est exposé au chapitre 5, mais sans prise en compte des extrémités. La raison pour laquelle ce problème a fait l'objet d'un chapitre particulier est justifiée du fait de la valeur élevée du glissement, qui entraîne que la décomposition selon deux axes ne s'impose pas, et du fait qu'on s'intéresse surtout aux pertes, qui sont données directement par la méthode générale, avant même d'aboutir aux schémas équivalents.

Dans le cas présent où on veut en outre évaluer l'influence des extrémités, ce traitement à part se trouve justifié par deux raisons supplémentaires :

- d'une part on peut bien considérer que les courants inverses restent confinés dans les zones voisines de la surface du rotor, et se referment uniquement par les frettes,

- d'autre part, il est intéressant d'accéder à une connaissance aussi localisée que possible des pertes, afin de permettre le choix des technologies les mieux adaptées à supporter ces régimes. Nous allons voir que la méthode permet une telle approche.

E.3.5.1 - Calcul des pertes par catégories de matériaux.

Supposons que, par la méthode du § 5.2. et pour un taux donné de composante inverse i_1 on ait calculé toutes les pertes locales et notamment les pertes totales P_{i_2}, mais en négligeant les effets d'extrémité.

La prise en compte des effets d'extrémité en ce qui concerne les frettes s'effectue en utilisant le coefficient k_{ia}, quotient de P_a (E.12) par P_o (E.7), soit avec A donné par (E.11)

(E.25)
$$k_{ia} = \frac{D_r k_a \, th^2 \, \frac{k_f L_r}{D_r} \, th \, \frac{2 f_a}{D_r}}{f A^2 L_r}$$

La prise en compte des effets d'extrémité en ce qui concerne la partie active du rotor s'effectue en utilisant le coefficient k_{ir} quotient de P_r (E.13) par P_o (E.7), soit avec A donné par (E.11)

(E.26)
$$k_{ir} = \frac{D_r k \, th \, \frac{k_f L_r}{D_r}}{f A^2 L_r} - \frac{2 D_r \, th \, \frac{k_f L_r}{D_r}}{f A L_r} + 1$$

Du fait des phénomènes d'extrémité les pertes totales non majorées f_{io}, somme de f_a (68) et de f_c (73) sont majorées dans le rapport

$$\frac{P_o}{P_a + P_r} = \frac{1}{k_{ia} + k_{ir}}$$

C'est le rapport inverse du rapport des puissances calculées aux § E.3.2 et E.3.3., puisque ces puissances avaient été calculées à égalité de f.é.m., alors qu'ici, au contraire, nous nous imposons le courant (par son taux i_2).

Les pertes inverses totales f_i compte tenu des extrémités valent donc :

$$f_i = \frac{f_{io}}{k_{ia} + k_{ir}}$$

d'où les pertes inverses dans les frettes :

(E.27) $$p_{ia} = \frac{p_{io}\, k_{ia}}{(k_{ia} + k_{ir})^2}$$

et d'où les pertes inverses dans la partie active du rotor :

(E.28) $$p_{ir} = \frac{p_{io}\, k_{ir}}{(k_{ia} + k_{ir})^2}$$

(avec donc : $p_i = p_{ia} + p_{ir}$)

Si alors on veut détailler par catégorie de matériau, il suffit de multiplier par

$$\frac{k_{ir}}{(k_{ia} + k_{ir})^2}$$

chaque poste de pertes, p_{ak} ($k = 1$ à 7) et p_{ck} ($k = 1$ à 6) calculé au chapitre 5, formules (72) à (81).

Dans le cas où la zone polaire n'est pas munie de cales amagnétiques, les formules (69) à (73) doivent être remplacées par (D.51), éventuellement corrigée conformément aux considérations du § D.3.2.

E.3.5.2 - Autres informations fournies par le calcul.

A partir des expressions (E.10), et en utilisant des résultats intermédiaires du calcul conduisant à (E.12) et (E.13), il est possible d'obtenir par le calcul des informations :

- sur la loi de répartition longitudinale des pertes, c'est-à-dire la loi en fonction de x , dans la partie active du rotor et dans les frettes,

- sur la proportion de courant inverse se refermant soit par les frettes, soit par la surface du fût du rotor.

E.3.6 - Application aux calculs relatifs aux schémas équivalents.

Rappelons que l'ensemble de l'étude présente est limité à l'influence des extrémités sur les résistances (et non sur les réactances) et que le paragraphe présent concerne uniquement les zones a et c du rotor.

Il nous suffit donc d'évaluer le coefficient par lequel il convient de multiplier

- d'une part la somme $\sum_{k=1}^{7} R_{ak}$

intervenant dans (26)

- d'autre part la somme $\sum_{k=1}^{6} R_{ck}$

intervenant dans (29)

Ce coefficient, que nous notons k_m s'écrit simplement

(E.29) $$k_m = \frac{P_o}{P_a + P_r}$$

Le rapport des résistances est en effet le rapport inverse des puissances, puisque celles-ci ont été calculées "à égalité de f.é.m.".

Utilisant (E.7), (E.11), (E.12) et (E.13), on trouve :

(E.30) $$k_m = \frac{k + k_a \operatorname{th} \frac{2\pi a_\ell}{D_r} \operatorname{th} \frac{k\pi L_r}{D_r}}{k + k_a \operatorname{th} \frac{2\pi a_\ell}{D_r} \operatorname{th} \frac{k\pi L_r}{D_r} - \frac{D_r}{\pi L_r} \operatorname{th} \frac{k\pi L_r}{D_r}}$$

k et k_a étant obtenus par (E.8) et (E.9) dans lesquels R_a, R_x et R_z résultent de l'étude faite pour les différents cas possibles au § E.4.

On écrit alors :

(E.31) $$R_{am} = k_m \sum_{k=1}^{7} R_{ak}$$

et dans (26) on substitue R_{am} à $\sum_{k=1}^{7} R_{ak}$

On écrit de même :

(E.32) $$R_{cm} = k_m \sum_{k=1}^{6} R_{ck}$$

et dans (29) on substitue R_{cm} à $\sum_{k=1}^{6} R_{ck}$

E.4. EFFETS D'EXTREMITE RELATIFS AUX PHENOMENES SOUS LES ENCOCHES.

Pour le calcul du coefficient majorateur k_{m8} dans les zones b et d (fig. 10) on assimile l'ensemble de ces zones et de leur prolongement sous les têtes de bobines à un cylindre plein, de diamètre D_e . D_e est le diamètre du rotor sous les têtes de bobines ; celles-ci doivent en effet prendre appui sur un prolongement du corps au rotor de diamètre D_e et de longueur a_e.

L'illustration de ce qui vient d'être dit peut être observée fig. 2 et fig. D.3.

Il est évident que D_e est peu différent de D_b, ce qui justifie partiellement notre hypothèse ; par contre D_d est supérieur. Cependant, comme la zone b est prépondérante, et que nous cherchons seulement un coefficient correcteur, nous maintenons la simplification consistant à assimiler D_b et D_d à D_e.

On appliquera au cylindre de diamètre D_e et de longueur L_r, prolongé par les deux extrémités de longueur a_e, le même traitement mathématique qu'au début du § E.3. Il en résulte que le coefficient majorateur qui devra affecter R_{b8} et R_{d8} et que nous noterons k_{m8}, sera obtenu en transposant tout simplement l'expression (E.30) donnant k_m. Dans cette expression, il convient :

- de faire $k = k_a = 1$, appliquant (E.8) et (E.9) à un cylindre de résistivité homogène,
- de remplacer a_f par a_e et D_r par D_e, d'où :

$$k_{m8} = \frac{1+th\,\frac{2\rho a_e}{D_e}\,th\,\frac{\rho L_r}{D_e}}{1+th\,\frac{2\rho a_e}{D_e}\,th\,\frac{\rho L_r}{D_e}-\frac{D_e}{\rho L_r}\,th\,\frac{\rho L_r}{D_e}} \qquad \text{(E.33)}$$

On aura alors :

$$R_{bm} = k_{m8}\,R_{b8} \qquad \text{(E.34)}$$

et dans (26) on substituera R_{bm} à R_{b8}

On écrira de même :

$$R_{dm} = k_{m8}\,R_{d8} \qquad \text{(E.35)}$$

et dans (29) on substituera R_{dm} à R_{d8}

Les corrections d'extrémité élaborées aux § E.3.6. et E.4. n'interviennent que dans l'établissement des schémas équivalents. Elles conduisent à remplacer les équations (26) et (29) par :

$$Z_{atm} = R_{atm} + jX_{at} = (R_{am} + R_{bm}) + j\left(\sum_{k=0}^{7} X_{ak} + X_{b8}\right) \qquad \text{(E.36)}$$

$$Z_{ctm} = R_{ctm} + jX_{ct} = (R_{cm} + R_{dm}) + j\left(\sum_{k=0}^{6} X_{ck} + X_{d8}\right) \qquad \text{(E.37)}$$

puis à reporter cette substitution dans (34) et (35), le reste des calculs étant inchangé.

Figure E 1

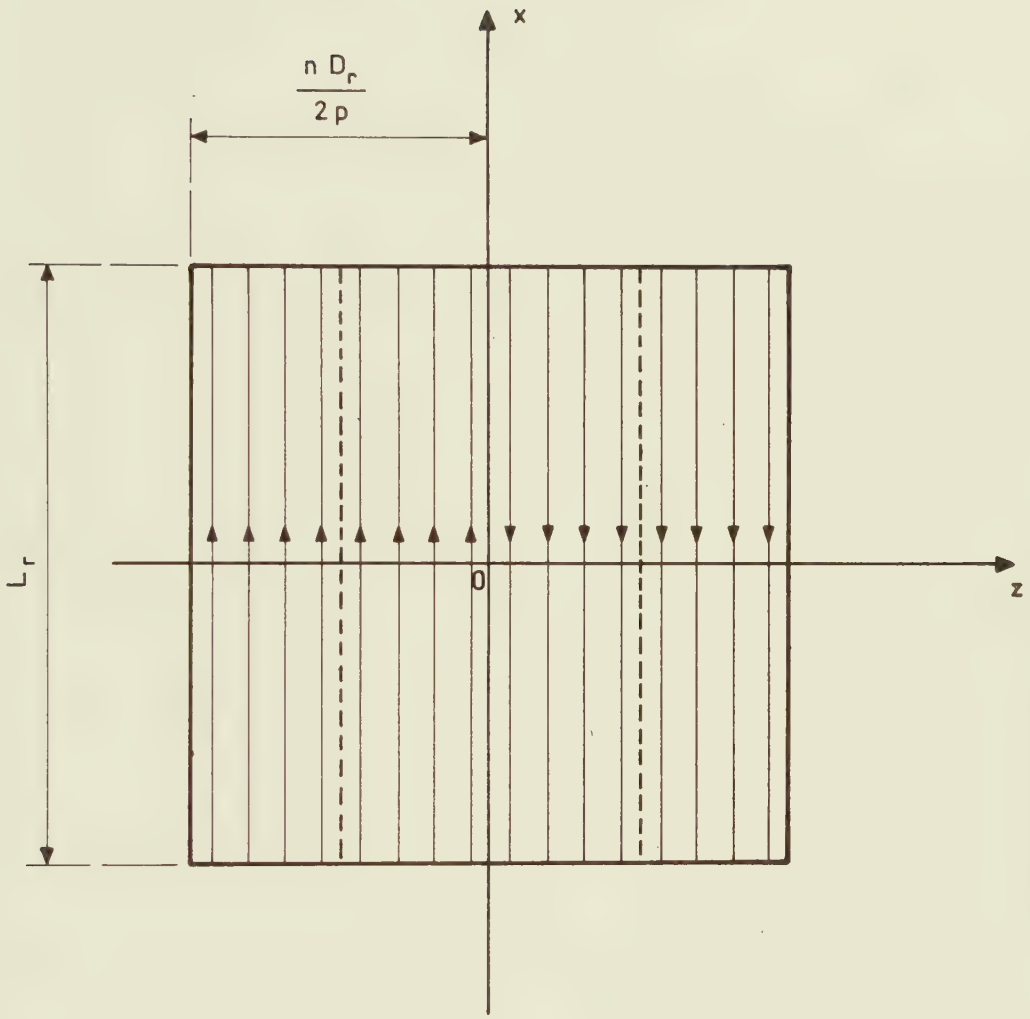
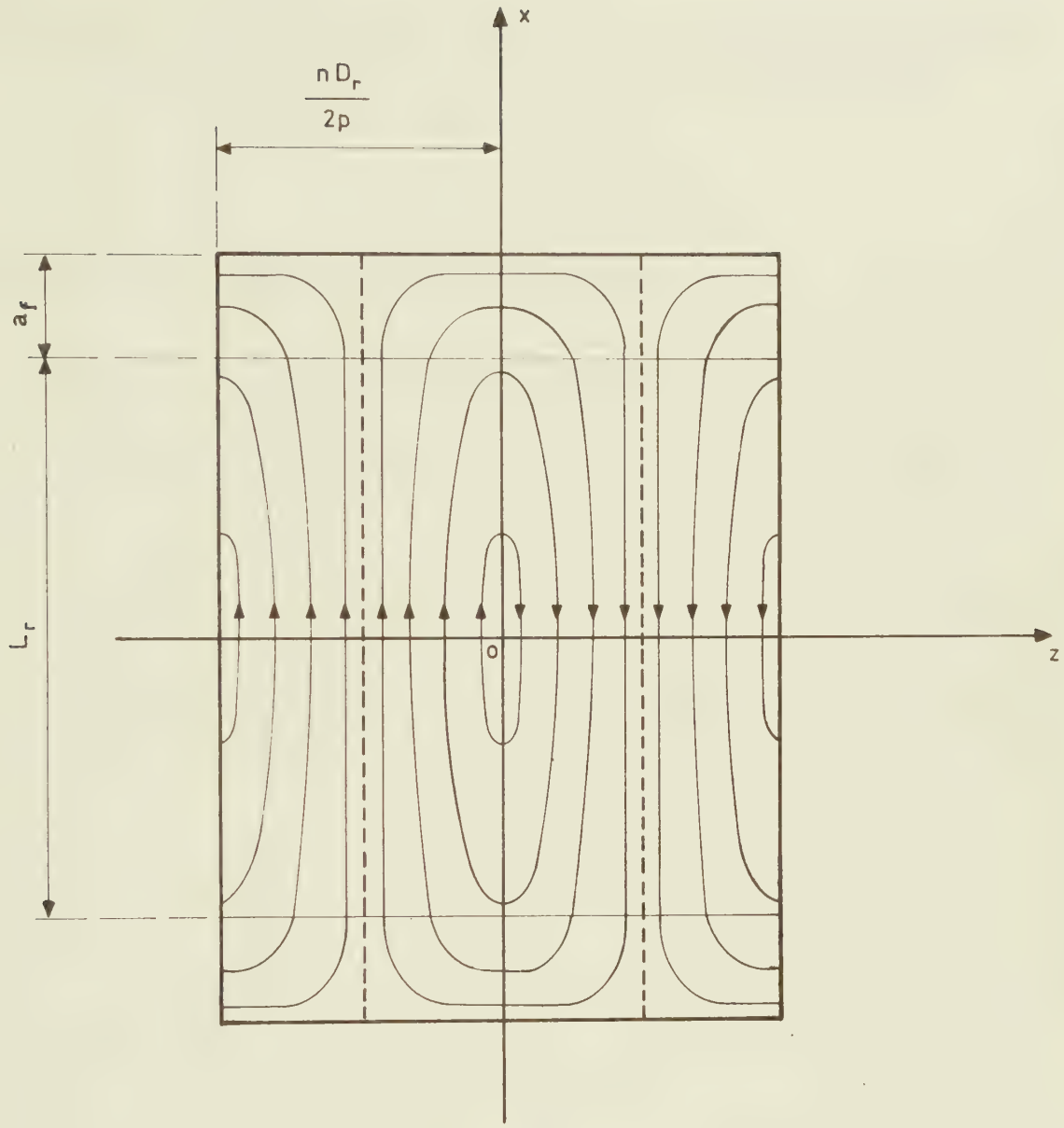


Fig. E 1

ALLURE DES LIGNES DE COURANT EN SURFACE DU ROTOR EN REPRESENTATION DEVELOPPEE SANS PRISE EN COMPTE DES EFFETS D'EXTREMITE

Figure E 2



Fig_E2

ALLURE DES LIGNES DE COURANT EN SURFACE DU ROTOR EN REPRESENTATION DEVELOPPEE AVEC PRISE EN COMPTE DES EFFETS D'EXTREMITE

Annexe F

CALCUL DES IMPEDANCES DES SCHEMAS EQUIVALENTS A INDUCTEUR OUVERT, EN VALEURS REDUITES

F.1. LES VALEURS REDUITES DANS LES MACHINES SYNCHRONES.

F.1.1 - Principe du passage aux valeurs réduites en ce qui concerne le stator et expression de $\mathfrak{z}_{md}$.

La "valeur réduite" d'une grandeur physique (tension, courant, impédance, ...) est un nombre sans dimension, quotient de cette grandeur par la "valeur de base".

Certaines valeurs de base peuvent être choisies arbitrairement, mais certaines relations doivent être observées pour que l'ensemble soit cohérent.

Un turboalternateur triphasé est caractérisé (au stator) par la puissance apparente nominale S_n, la tension nominale entre phases U_n, la tension nominale entre phase et neutre V_n, le courant nominal I_n, avec les relations :

$$U_n = V_n \sqrt{3}$$

$$S_n = U_n I_n \sqrt{3}$$

On adoptera comme valeurs de base :

- le courant nominal I_n,
- la tension nominale entre phase et neutre V_n,
- l'impédance "nominale" $Z_n = \dfrac{V_n}{I_n} = \dfrac{U_n^2}{S_n}$

Les grandeurs figurant dans les équations de Park sont alors exprimées très simplement en valeurs réduites

(F.1)
$$v_d = \frac{V_d}{V_n} \qquad v_q = \frac{V_q}{V_n} \qquad i_d = \frac{I_d}{I_n} \qquad i_q = \frac{I_q}{I_n} \qquad r_s = \frac{R_s}{Z_n}$$

Notons aussi que la valeur réduite d'une impédance Z (ohms) associée à la tension et au courant du stator s'écrit toujours :

(F.2) $$\zeta = \frac{Z}{Z_n} = \frac{Z I_n}{V_n} = \frac{Z S_n}{U_n^2}$$

Dans notre étude où les grandeurs varient sinusoïdalement et sont exprimées en valeurs efficaces, v_d v_q i_d i_q sont des nombres complexes qui ont pour module 1 lorsque la grandeur correspondante a pour valeur sa "valeur de base", qui a été ici choisie égale à la valeur nominale.

Adopter le même type de définition pour les flux et inductances nécessiterait d'exprimer également le temps en valeur réduite ; il n'est pas indispensable de pousser aussi loin l'usage des valeurs réduites. Il est tout à fait possible et assez usuel dans ce genre de problème de conserver au temps sa dimension et son échelle, à condition de définir les valeurs réduites ψ_d et ψ_q par

$$\psi_d = \frac{\Psi_d}{V_n} \qquad\qquad \psi_q = \frac{\Psi_q}{V_n}$$

(et alors ce sont les quantités $\omega_o \psi_d$ et $\omega_o \psi_q$ qui sont sans dimension et dont le module est 1 lorsque la grandeur correspondante a la valeur nominale).

De même la valeur réduite ℓ d'une inductance L sera définie par

$$\ell = \frac{L}{Z_n}$$

Nous allons maintenant calculer x_{md} en fonction des données technologiques de la machine. Ce calcul nous permettra en outre d'établir ensuite les relations annoncées entre x_{md} et les autres réactances de magnétisation.

L'enroulement triphasé au stator crée une distribution de f.m.m. que nous supposons sinusoïdale et qui a pour amplitude F_n lorsque le courant est nominal.

(F.4) $$F_n = \frac{4}{\pi} \times \frac{3}{2} \times n'_s I_n \sqrt{2}$$

n'_s = nombre effectif de spires stator en série par pôle et phase.

Cette f.m.m. est presque entièrement compensée par la d.d.p.m. entre les faces de l'entrefer. Faisons provisoirement l'hypothèse que le rotor a une perméabilité infinie. Alors de la f.m.m. ci-dessus on déduit le champ, par application du théorème d'Ampère, puis l'induction B en multipliant par μ_o.

La distribution d'induction B (θ) s'écrit alors :

$$B(\theta) = \frac{\mu_o}{e} F_n \sin p\theta$$

(origine des angles à l'axe q et alimentation dans l'axe d).

Remarque 1 - L'entrefer est parfois grand devant le rayon, donc l'induction n'est pas uniforme : la formule ci-dessus peut être considérée comme valable au droit du diamètre moyen d'entrefer $D_e = D_r + e$. Pour un calcul plus précis, inutile ici, voir Annexe A.

2 - Le fait d'avoir négligé le fer n'est que provisoire : on sait en effet majorer x_{md} pour en tenir compte, même en régime saturé. L'important est que toutes les réactances qu'on va exprimer en fonction de x_{md} seront majorées dans les mêmes proportions, si bien que leurs relations de proportionnalité restent valables.

Le flux d'enroulement créé par le stator à travers lui-même ψ_{md} et dû à B (θ) s'obtient en intégrant à travers un pas polaire ($0 < \theta < \frac{\pi}{p}$) au droit du rayon $D_e/2$ et multipliant par le nombre effectif de spires par phase $2p n'_s$

$$\psi_{md} = 2p n'_s \int_0^{\frac{\pi}{p}} \frac{D_e}{2} L B(\theta)\, d\theta \qquad \text{(F.5)}$$

(ce n'est pas le flux nominal)

d'où finalement x_{md} en divisant $\omega_o \psi_{md}$ (calculé pour I_n) par V_n

$$x_{md} = \frac{\omega_o \psi_{md}(I_n)}{V_n} = \frac{12 \mu_o \omega_o L D_e n'^2_s I_n}{\pi e V_n} \qquad \text{(F.6)}$$

F.1.2 - Passage aux valeurs réduites au rotor. Expression de toutes les autres impédances (inducteur ouvert).

Nous adoptons la méthode [19] quasi universellement adoptée.

En ce qui concerne les circuits associés aux différents pas dentaires (circuits 1 à n du § 4.2.1.) on adopte un courant de base unique noté I_{kb} et une tension de base unique notée V_{kb} (tous deux en valeur efficace)

I_{kb} est choisi tel que, parcourant un circuit dont les conducteurs d'aller et de retour sont écartés d'un pas polaire $\left(\frac{\pi}{p}\right)$, soit $\theta_j = 0$ au § 4.2.1., il crée une f.m.m. dont le fondamental soit égal à F_n. Ce circuit étant diamétral, sa f.m.m. est une courbe en créneaux d'où la définition de I_{kb} et la relation entre I_{kb} et I_n :

(F.7)
$$\frac{I_{kb}}{I_n} = \frac{3}{2}\, n'_s$$

V_{kb} est la tension induite dans ce même circuit par le flux nominal, c'est-à-dire celui qui crée V_n au stator, d'où :

(F.8)
$$\frac{V_{kb}}{V_n} = \frac{1}{n'_s}$$

F.1.2.1 - Calcul des réactances mutuelles entre le stator et les circuits du rotor x_{mdj}.

On réalise la même expérience qu'au paragraphe précédent (I_n au stator) mais cette fois on calcule le flux ψ_{mdj} reçu par le circuit rotorique d'angle θ_j . L'expression se déduit de (F.5) en divisant par n'_s et en remplaçant les bornes d'intégration par θ_j et $\frac{\pi}{p} - \theta_j$ d'où :

$$\psi_{mdj} = \frac{\psi_{md}}{n'_s} \cos p\,\theta_j$$

d'où
$$x_{mdj} = \frac{\omega_o \psi_{mdj}\,(I_n)}{V_{kb}}$$

(F.9)
$$x_{mdj} = x_{md} \cos p\,\theta_j$$

F.1.2.2. Calcul des réactances de magnétisation propres aux circuits du rotor.

On fait passer dans un tel circuit le courant I_{kb} d'où résulte, au droit du diamètre D_e , une induction

$$B(\theta) = \frac{\mu_o}{e} I_{kb}$$

constante dans l'angle (θ_j , $\frac{\pi}{p} - \theta_j$) et nulle sur le reste du pas polaire.

Le flux d'enroulement à travers ce même circuit vaut alors :

$$\psi_{mj} = 2p \int_{\theta_j}^{\frac{\pi}{p} - \theta_j} \frac{D_e}{2} L B(\theta)\, d\theta$$

d'où :

$$x_{mj} = \frac{\omega_o \psi_{mj}(I_{kb})}{V_{kb}}.$$

Tous calculs faits, on trouve :

(F.10)
$$x_{mj} = \frac{\pi}{4} x_{md} \left(\frac{\pi}{2} - p\theta_j \right)$$

F.1.2.3 - Calcul des réactances mutuelles entre deux circuits j et l du rotor.

On réalise la même expérience que ci-dessus et il est évident que le flux commun aux deux enroulements est celui de l'enroulement le plus étroit, c'est-à-dire dont l'indice est le sup de j et de l d'où :

(F.11)
$$x_{mjl}\ (j > l) = x_{mj} = \frac{\pi}{4} x_{md} \left(\frac{\pi}{2} - p\theta_j \right)$$

Nous avons donc obtenu le premier résultat annoncé : expression simple de toutes les réactances "de magnétisation" (propres et mutuelles) en fonction de x_{md}.

F.1.2.4 - Calcul des impédances "de fuites" du rotor.

Il résulte des considérations du § 4.1. que l'impédance "de fuites" associée à un pas dentaire n'a que deux valeurs distinctes :

(F.12)
- dans la zone bobinée : $(1 \leq j \leq n_a)$

$$Z_j = Z_{at} \qquad \text{(donnée par (26))}$$

- dans la zone polaire $(n_a < j \leq n)$

$$Z_j = Z_{ct} \qquad \text{(donnée par (29))}$$

Si on considère un de ces pas dentaires, les pas dentaires homologues sont en nombre $4p$ (nombre total de demi-pôles). L'impédance associée à un Z_j est donc $4p\,Z_j$ et la valeur réduite vaut par définition :

(F.13)
$$(1 \leq j \leq n_a) \qquad \zeta_{at} = \frac{4p\, Z_{at}\, I_{kb}}{V_{kb}} = \frac{6p\, n_s'^2\, Z_{at}\, I_n}{V_n}$$

(F.14)
$$(n_a < j \leq n) \qquad \zeta_{ct} = \frac{4p\, Z_{ct}\, I_{kb}}{V_{kb}} = \frac{6p\, n_s'^2\, Z_{ct}\, I_n}{V_n}$$

Lorsque la distinction n'est pas nécessaire on donnera à $\mathfrak{z}_{\partial at}$ et $\mathfrak{z}_{\partial ct}$ le même symbole $\mathfrak{z}_j$.

F.1.3 - Cas de l'inducteur et des grandeurs d'axe en quadrature.

Le cas particulier de l'inducteur et de son couplage avec les autres circuits est traité au § 4.4.

En ce qui concerne les grandeurs d'axe en quadrature, les principes ci-dessus s'appliquent sans difficulté, en décalant simplement de $\pi/2p$ l'origine du comptage des angles. Il suffit donc d'effectuer cette opération en fin de calcul.

F.2. RESOLUTION DU SCHEMA EQUIVALENT D'AXE DIRECT, A INDUCTEUR OUVERT.

Partant des équations (36) ou du schéma équivalent fig. 14, notre propos est d'établir une expression analytique explicite de l'impédance $j x_d (j\omega_o q) = \dfrac{j\omega_o \psi_d}{i_d}$ correspondant à ce schéma. Ce calcul passe par le calcul intermédiaire du courant i_{dj} ($j \in (1,n)$).

Si dans (36) nous retranchons membre à membre les deux lignes d'indices j et $j+1$, il vient :

$$(F.15)\qquad \begin{cases} 0 = \mathfrak{z}_{md}\, i_d \left(\cos p\theta_{j+1} - \cos p\theta_j \right) \\ \\ + \dfrac{\pi}{4}\, \mathfrak{z}_{md} \left[\left(\dfrac{\pi}{2} - p\theta_{j+1} \right) - \left(\dfrac{\pi}{2} - p\theta_j \right) \right] \left(i_{d1} + i_{d2} + \cdots + i_{dj} \right) \\ \\ + \mathfrak{z}_{j+1}\, i_{dj+1} - \mathfrak{z}_j\, i_{dj} \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation (F.15) dont on voit bien qu'elle fait intervenir des différences de quantités voisines, on va considérer que la différence $\theta_{j+1} - \theta_j = \Delta\theta$ est suffisamment petite pour que les différences finies puissent être transformées en différentielles en vue d'obtenir une équation intégro-différentielle que l'on intégrera.

La résolution doit être faite de façon distincte pour $1 \leqslant j \leqslant n_a$ (angle de 0 à θ_a) et pour $n_a < j \leqslant n$ (angle de θ_a à $\dfrac{\pi}{2p}$).

F.2.1 - Equation du courant de 0 à θ_a.

On pose :

$$\theta_{j+1} - \theta_j = \Delta\theta$$

$$\cos p\,\theta_{j+1} - \cos p\,\theta_j = -p\,\Delta\theta \sin p\,\theta_j$$

$$i_{dj+1} - i_{dj} = \Delta i_{dj}$$

(F.13)
$$\zeta_{j+1} = \zeta_j = \zeta_{at} = \frac{6p\,n_s'^2\,Z_{at}\,I_n}{V_n}$$

L'équation (F.15) devient :

(F.16)
$$\begin{cases} -\zeta_{md}\,i_d\,p\,\Delta\theta \sin p\,\theta_j - \zeta_{md}\,\frac{\pi}{4}\,p\Delta\theta\,(i_{d1}+i_{d2}+\cdots+i_{dj}) \\ +\zeta_{at}\,\Delta i_{dj} = 0 \end{cases}$$

Dans cette équation $\Delta\theta$ a une valeur bien précise ; changer $\Delta\theta$ en infiniment petit $d\theta$ nécessite de modifier l'expression de ζ_{at}, puisque son substitut doit devenir infiniment grand.

On considère alors l'impédance ζ_a qui résulterait de la mise en parallèle de tous les ζ_{at} si la machine était isotrope, c'est-à-dire si ζ_{at} concernait tout le demi-pas polaire. Le nombre de telles impédances serait alors $\frac{\pi}{2p\Delta\theta}$ d'où :

$$\zeta_a = \frac{2p\,\Delta\theta\,\zeta_{at}}{\pi}$$

(mais la formule pratique de ζ_a est, sachant que dans cette zone

$$\Delta\theta = \frac{2t_{a1}}{D_r}$$

(F.17)
$$\zeta_a = \frac{4p\,t_{a1}\,\zeta_{at}}{\pi\,D_r}\quad)$$

D'autre part, l'indice j n'ayant plus de signification, nous sommes conduits à appeler di_{ad} le courant élémentaire associé à l'angle $d\theta$, au droit de l'angle θ (appartenant à la zone a ($0 < \theta < \theta_a$) (il remplace le courant fini i_{dj}).

L'équation (F.16) donne donc lieu à l'équation intégro-différentiell (pour $0 < \theta < \theta_a$), dont $di_{ad}(\theta)$ est solution :

$$\frac{\pi}{4} \mathfrak{z}_{md} p \int_0^{\theta} di_{ad}\, d\theta - \frac{\pi}{2p} \mathfrak{z}_a \frac{d(di_{ad})}{d\theta} = - \mathfrak{z}_{md}\, i_d\, p \sin p\theta\, d\theta \qquad \text{(F.18)}$$

Mais la solution nécessite de tenir compte de la zone c .

F.2.2 - Equation du courant de θ_a à $\frac{\pi}{2p}$.

L'équation (F.16) de départ est toujours valable, à condition d'y remplacer $\mathfrak{z}_{at}$ par $\mathfrak{z}_{ct}$ (F.14).

On introduit alors l'impédance $\mathfrak{z}_c$ qui résulterait de la mise en parallèle de tous les $\mathfrak{z}_{ct}$ si la machine était isotrope, c'est-à-dire si $\mathfrak{z}_{ct}$ concernait tout le demi-pas polaire :

$$\mathfrak{z}_c = \frac{2p \Delta\theta\, \mathfrak{z}_{ct}}{\pi}$$

(formule pratique :

$$\mathfrak{z}_c = \frac{4p\, t_{c1}\, \mathfrak{z}_{ct}}{\pi D_r} \quad) \qquad \text{(F.19)}$$

Enfin, on appelle di_{cd} le courant élémentaire associé à l'angle au droit de l'angle θ appartenant à la zone c ($\theta_a < \theta < \frac{\pi}{2p}$).

Il est solution de l'équation différentielle, issue de (F.16) et où doit intervenir di_{ad} :

$$\frac{\pi}{4} \mathfrak{z}_{md} p \left[\int_0^{\theta_a} di_{ad}\, d\theta + \int_{\theta_a}^{\theta} di_{cd}\, d\theta \right] - \frac{\pi}{2p} \mathfrak{z}_c \frac{di_{cd}}{d\theta} = - \mathfrak{z}_{md}\, i_d\, p \sin p\theta\, d\theta \qquad \text{(F.20)}$$

F.2.3 - Expression des courants di_{ad} et di_{cd} .

La solution des deux équations (F.18) et (F.20) est :

$$(0 < \theta < \theta_a) \qquad di_{ad} = - i_d\, p\, d\theta \left[b_d \cos p\theta + a_d \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_a}}\, p\theta \right] \qquad \text{(F.21)}$$

(F.22) $\left(\theta_a < \theta < \frac{\pi}{2p}\right)$ $\quad di_{cd} = -i_d\, p\, d\theta \left[d_d \cos p\theta + c_d \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_c}} \left(\frac{\pi}{2} - p\theta\right)\right]$

Les constantes d'intégration a_d , b_d , c_d et d_d sont obtenues :

- en portant (F.21) et (F.22) dans les équations (F.18) et (F.20), ce qui fournit 3 conditions, puisque dans la 2ème équation interviennent des termes en θ_a et des termes en θ qui s'identifient séparément ;
- la dernière relation consiste à écrire que $\mathfrak{z}_j i_{dj}$ doit être continu à la traversée de la frontière entre les zones a et c, puisque des 4 branches de la maille (1) fig. 14, seules les 2 branches $\mathfrak{z}_j$ et $\mathfrak{z}_{j+1}$ conservent une tension non nulle après passage à la limite.

On écrira donc :

$$\mathfrak{z}_a\, di_{ad} = \mathfrak{z}_c\, di_{cd} \qquad (\text{pour} \quad \theta = \theta_a)$$

Les constantes a_d , b_d , c_d , d_d ont pour valeurs :

(F.23) $$b_d = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{z}_{md}}{\mathfrak{z}_{md} + 2\mathfrak{z}_a}$$

(F.24) $$d_d = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{z}_{md}}{\mathfrak{z}_{md} + 2\mathfrak{z}_c}$$

a_d et c_d sont solution d'un système du 2ème degré et on les écrit :

(F.25) $$a_d = \frac{b'_d\, c''_d - b''_d\, c'_d}{a'_d\, c''_d - a''_d\, c'_d}$$

(F.26) $$c_d = \frac{a'_d\, b''_d - a''_d\, b'_d}{a'_d\, c''_d - a''_d\, c'_d}$$

avec :

$$a'_d = \frac{\sqrt{2\mathfrak{z}_a \mathfrak{z}_{md}}}{2\mathfrak{z}_c} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_a}}\, p\theta_a$$

$$c'_d = \sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_c}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_c}}\, p\theta_c$$

$$b'_d = \frac{4}{\pi} \frac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_c} \left(\frac{\mathfrak{z}_{md}}{\mathfrak{z}_{md} + 2\mathfrak{z}_c} - \frac{\mathfrak{z}_{md}}{\mathfrak{z}_{md} + 2\mathfrak{z}_a} \right) \sin p\theta_a$$

$$a''_d = \frac{2\mathfrak{z}_a}{\mathfrak{z}_{md}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_a}}\, p\theta_a$$

$$c''_d = -\frac{2\mathfrak{z}_c}{\mathfrak{z}_{md}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_c}}\, p\theta_c$$

$$b''_d = \frac{4}{\pi} \left(\frac{2\mathfrak{z}_c}{\mathfrak{z}_{md} + 2\mathfrak{z}_c} - \frac{2\mathfrak{z}_a}{\mathfrak{z}_{md} + 2\mathfrak{z}_a} \right) \cos p\theta_a$$

F.2.4 - Principe du calcul de l'impédance d'axe direct.

Ce calcul passe par le calcul des potentiels des noeuds A_j de la fig. 14. La différence de potentiel entre les noeuds A_j et A_{j+1} vaut en effet :

(F.27)
$$v_{A_{j+1}} - v_{A_j} = \mathfrak{z}_{md} \left(\cos p\theta_j - \cos p\theta_{j+1} \right) \left(i_d + i_{d_1} + i_{d_2} + \cdots + i_{d_j} \right)$$

En faisant la somme de toutes ces quantités on accédera à $v_{A_n} - v_{A_0}$, qu'il suffira de diviser par i_d pour avoir l'impédance cherchée ; il faut faire un calcul différent dans la zone a et dans la zone c.

F.2.5 - Calcul de la tension correspondant à la zone a

Pour $0 < \theta < \theta_a$, l'expression (F.27) ci-dessus s'écrit, sous forme différentielle :

$$dv_{ad} = p\mathfrak{z}_{md} \sin p\theta \, d\theta \left(i_d + \frac{1}{d\theta} \int_0^{\theta} di_{ad} \, d\theta \right)$$

On remplace di_{ad} par sa valeur (F.21), ce qui donne :

$$dv_{ad} = p z_{md} i_d \sin p\theta \, d\theta \left(1 - b_d \sin p\theta - a_d \sqrt{\frac{2z_a}{z_{md}}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{z_{md}}{2z_a}} p\theta\right)$$

On intègre alors de 0 à θ_a .La tension correspondante est notée v_{ad} Elle est proportionnelle à i_d d'où tous calculs faits :

(F.28

$$\left\{ z_{ad} = \frac{v_{ad}}{i_d} = z_{md} \left\{ \left(1 - \cos p\theta_a\right) - \frac{b_d}{4} \left(2p\theta_a - \sin 2p\theta_a\right) \cdots \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdots + \frac{j a_d}{2} \sqrt{\frac{2z_a}{z_{md}}} \left[\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{z_{md}}{2z_a}} + j\right) p\theta_a}{\sqrt{\frac{z_{md}}{2z_a}} + j} - \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{z_{md}}{2z_a}} - j\right) p\theta_a}{\sqrt{\frac{z_{md}}{2z_a}} - j} \right] \right\} \right.$$

z_{ad} est une première partie de l'impédance cherchée.

F.2.6 - Calcul de la tension correspondant à la zone C.

Pour $\theta_a < \theta < \frac{\pi}{2p}$, l'expression (F.27) ci-dessus s'écrit, sous forme différentielle :

$$dv_{cd} = p z_{md} \sin p\theta \, d\theta \left(i_d + \frac{1}{d\theta} \int_o^{\theta_a} di_{ad} \, d\theta + \frac{1}{d\theta} \int_{\theta_a}^{\theta} di_{cd} \, d\theta \right)$$

On remplace di_{ad} et di_{cd} par leurs valeurs (F.21) et (F.22), ce qui donne :

$$dv_{cd} = p z_{md} i_d \sin p\theta \, d\theta \left\{ 1 - b_d \sin p\theta_a - a_d \sqrt{\frac{2z_a}{z_{md}}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{z_{md}}{2z_a}} p\theta_a \cdots \right.$$

$$\cdots - d_d \left(\sin p\theta - \sin p\theta_a\right) + c_d \sqrt{\frac{2z_c}{z_{md}}} \left[\operatorname{ch} \sqrt{\frac{2z_c}{z_{md}}} \left(\frac{\pi}{2} - p\theta\right) \cdots \right.$$

$$\left.\left. \cdots - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{2z_c}{z_{md}}} \left(\frac{\pi}{2} - p\theta_a\right) \right] \right\}$$

On intègre alors de θ_a à $\frac{\pi}{2p}$;la tension correspondante est notée v_{cd}. Elle est proportionnelle à i_d d'où tous calculs faits :

(F.29)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{z}_{cd} = \dfrac{v_{cd}}{i_d} = \mathfrak{z}_{md} \left\{ \cos \mathrm{j}\theta_a \left(1 - b_d \sin \mathrm{j}\theta_a - a_d \sqrt{\dfrac{2\mathfrak{z}_a}{\mathfrak{z}_{md}}}\ \mathrm{sh} \sqrt{\dfrac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_a}}\ \mathrm{j}\theta_a \right) \cdots \right. \\ \cdots + d_d \sin \mathrm{j}\theta_a - c_d \sqrt{\dfrac{2\mathfrak{z}_c}{\mathfrak{z}_{md}}}\ \mathrm{ch} \sqrt{\dfrac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_c}}\ \mathrm{j}\theta_c \Big) - \dfrac{d_d}{4} \left(\pi - 2\mathrm{j}\theta_a + \sin 2\mathrm{j}\theta_a \right) \cdots \\ \left. \cdots + \dfrac{j_{cd}}{2} \sqrt{\dfrac{2\mathfrak{z}_c}{\mathfrak{z}_{md}}} \left[\dfrac{\mathrm{ch} \left[\sqrt{\dfrac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_c}} \left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{j}\theta_a \right) - j\mathrm{j}\theta_a \right]}{\sqrt{\dfrac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_c}} + j} - \dfrac{\mathrm{ch} \left[\sqrt{\dfrac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_c}} \left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{j}\theta_a \right) + j\mathrm{j}\theta_a \right]}{\sqrt{\dfrac{\mathfrak{z}_{md}}{2\mathfrak{z}_c}} - j} \right] \right\} \end{array} \right.$$

La fin du calcul est détaillée à la fin du § 4.2.4.

F.3. RESOLUTION DU SCHEMA EQUIVALENT D'AXE EN QUADRATURE.

Le principe de la transposition du calcul précédent en vue d'obtenir les éléments du schéma équivalent d'axe en quadrature est expliqué au § 4.2.5. En conséquence nous ne donnons ici que les expressions détaillées des constantes a_q b_q c_q d_q et des impédances $\mathfrak{z}_{aq}$ et $\mathfrak{z}_{cq}$.

F.3.1 - Coefficients a_q b_q c_q d_q intervenant dans les expressions (45) et (46) des courants élémentaires d'axe en quadrature.

(F.30)
$$b_q = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{z}_{mq}}{\mathfrak{z}_{mq} + 2\mathfrak{z}_a}$$

(F.31)
$$d_q = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\mathfrak{z}_{mq}}{\mathfrak{z}_{mq} + 2\mathfrak{z}_c}$$

(F.32)
$$a_q = \frac{c'_q b''_q - c''_q b'_q}{c'_q a''_q - c''_q a'_q}$$

(F.33)
$$c_q = \frac{b'_q a''_q - b''_q a'_q}{c'_q a''_q - c''_q a'_q}$$

avec :

$$a'_q = \sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_a}}\ \mathrm{ch}\sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_a}}\ \mu\theta_a$$

$$c'_q = \frac{\sqrt{2\mathfrak{z}_c\,\mathfrak{z}_{mq}}}{2\mathfrak{z}_a}\ \mathrm{sh}\sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_c}}\ \mu\theta_c$$

$$b'_q = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_a}\left(\frac{\mathfrak{z}_{mq}}{\mathfrak{z}_{mq}+2\mathfrak{z}_a} - \frac{\mathfrak{z}_{mq}}{\mathfrak{z}_{mq}+2\mathfrak{z}_c}\right)\sin\mu\theta_c$$

$$a''_q = -\frac{2\mathfrak{z}_a}{\mathfrak{z}_{mq}}\ \mathrm{sh}\sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_a}}\ \mu\theta_a$$

$$c''_q = \frac{2\mathfrak{z}_c}{\mathfrak{z}_{mq}}\ \mathrm{ch}\sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_c}}\ \mu\theta_c$$

$$b''_q = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2\mathfrak{z}_a}{\mathfrak{z}_{mq}+2\mathfrak{z}_a} - \frac{2\mathfrak{z}_c}{\mathfrak{z}_{mq}+2\mathfrak{z}_c}\right)\cos\mu\theta_c$$

F.3.2 - Expression de $\mathfrak{z}_{cq}$ et $\mathfrak{z}_{aq}$, intervenant dans (47) et dont la somme donne l'impédance (rotor + magnétisant) d'axe en quadrature.

(F.34)

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{z}_{cq} = \dfrac{v_{cq}}{i_q} = \mathfrak{z}_{mq}\left\{\left(1-\cos\mu\theta_c\right) - \dfrac{d_q}{4}\left(2\mu\theta_c - \sin 2\mu\theta_c\right)\ldots\right. \\ \left.\ldots + \dfrac{jc_q}{2}\sqrt{\dfrac{2\mathfrak{z}_c}{\mathfrak{z}_{mq}}}\left[\dfrac{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\dfrac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_c}}+j\right)\mu\theta_c}{\sqrt{\dfrac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_c}}+j} - \dfrac{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\dfrac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_c}}-j\right)\mu\theta_c}{\sqrt{\dfrac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_c}}-j}\right]\right\} \end{array}\right.$$

(F.35)

$$
\left\{
\begin{aligned}
\underline{\mathfrak{z}}_{aq} = \frac{\underline{v}_{aq}}{\underline{i}_q} = \mathfrak{z}_{mq} \Bigg\{ & \cos \mathfrak{p}\theta_c \left[1 - d_q \sin \mathfrak{p}\theta_c - c_q \sqrt{\frac{2\mathfrak{z}_c}{\mathfrak{z}_{mq}}}\, \mathrm{sh} \sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_c}}\, \mathfrak{p}\theta_c \cdots \right. \\
& \left. \cdots + b_q \sin \mathfrak{p}\theta_c - a_q \sqrt{\frac{2\mathfrak{z}_a}{\mathfrak{z}_{mq}}}\, \mathrm{ch} \sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_a}}\, \mathfrak{p}\theta_a \right] - \frac{b_q}{4} \left(\pi - 2\mathfrak{p}\theta_c + \sin 2\mathfrak{p}\theta_c \right) \cdots \\
& \cdots + \frac{\underline{j}_{aq}}{2} \sqrt{\frac{2\mathfrak{z}_a}{\mathfrak{z}_{mq}}} \left[\frac{\mathrm{ch} \left(\sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_a}}\, \mathfrak{p}\theta_a - j\mathfrak{p}\theta_c \right)}{\sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_a}} + j} - \frac{\mathrm{ch} \left(\sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_a}}\, \mathfrak{p}\theta_a + j\mathfrak{p}\theta_c \right)}{\sqrt{\frac{\mathfrak{z}_{mq}}{2\mathfrak{z}_a}} - j} \right] \Bigg\}
\end{aligned}
\right.
$$

Annexe G

CALCUL DU PHENOMENE DE PENETRATION, DANS UN MODELE A UNE DIMENSION, EN REGIME ALTERNATIF ET EN PRESENCE D'UNE COURBE DE MAGNETISATION RECTANGULAIRE

(Hypothèse de champ sinusoïdal appliquée)

Les hypothèses sont celles du début du § 1.4. de la 2ème partie.

G.1. ALLURE DE LA LOI DE DISTRIBUTION DE L'INDUCTION A UN INSTANT DONNE.

Nous nous plaçons à un instant t_1 tel que, par exemple, le champ $h(o, t_1)$ à la surface du fer est négatif. Nous admettons alors pour le moment que la distribution de l'induction dans le fer suit la loi de la fig. G 1 : égale à $-B_o\sqrt{2}$ pour $o < z < z_1$, égale à $+B_o\sqrt{2}$ pour $z_1 < z < z_2$, nulle pour $z > z_2$. Nous montrerons par la suite qu'effectivement cette distribution est la seule possible.

Considérons à l'instant t_1 deux points fixes A et B d'abscisses z_A ($z_1 < z_A < z_2$) et z_B ($z_B > z_2$) et intégrons l'équation (75) par rapport à z de z_A à z_B. Il vient :

$$\rho\left[j(z_B, t_1) - j(z_A, t_1)\right] = -\frac{d}{dt} B_o\sqrt{2}\left[z_2(t) - z_A\right] \quad (t = t_1)$$

Mais dans toute la zone $z > z_2$, b est nul, donc h aussi, donc en vertu de (74) j est nul, donc $j(z_B, t_1) = 0$.

D'autre part, z_A est un point fixe par définition, donc :

$$\frac{dz_A}{dt} = 0$$

Il vient donc :

$$\rho j(z_A, t_1) = B_o\sqrt{2}\,\frac{d}{dt} z_2(t) \qquad (t = t_1)$$

Donc, si $z_2(t)$ varie au cours du temps, $j(z_A, t_1)$ n'est pas nul. Nous allons montrer que c'est impossible, c'est-à-dire que $j(z_A, t_1)$ doit être nul pour $z_1 < z_A < z_2$, et donc que z_2 est immobile au cours du temps.

L'équation (75) montre que $j(z,t)$, pour t donné, est constant en fonction de z pour $0 < z < z_1$ et pour $z_1 < z < z_2$.

L'équation (74) montre alors que pour t donné, $h(z,t)$ suit une loi linéaire en fonction de z pour $0 < z < z_1$, et une loi linéaire en fonction de z, pour $z_1 < z < z_2$. Ces deux lois linéaires doivent se raccorder sans discontinuité de h en fonction de z, sinon d'après (74) j serait infini. Or, de plus, ces lois linéaires doivent passer par zéro en z_1 et en z_2, puisque b s'y annule. La seule loi possible pour h, linéaire entre z_1 et z_2 et s'annulant à ces deux points, est la loi nulle, et alors de (74) il résulte bien que j est nul entre z_1 et z_2, donc en particulier au point A, donc z_2 est constant en fonction du temps. Nous noterons :

$$z_2 = \delta_s$$

et nous l'appellerons profondeur de pénétration maximale en régime saturé.

G.2. RESOLUTION DES EQUATIONS DE MAXWELL.

Etudions maintenant la loi $z_1(t)$. Intégrant à l'instant t et entre $z = 0$ et $z = \infty$, l'équation (75) compte tenu de la fig. G1, il vient :

$$-\rho j(0,t) = -\frac{d}{dt}\left[-B_0\sqrt{2}\, z_1(t) + B_0\sqrt{2}\,(\delta_s - z_1(t))\right]$$

$$= -B_0\sqrt{2}\,\frac{d}{dt}(\delta_s - 2z_1(t))$$

$$-\rho j(0,t) = 2B_0\sqrt{2}\,(z_1'(t)) \qquad (G.1)$$

Une remarque s'impose. On a vu que h suit une loi linéaire aboutissant à $h=0$ en z_1. Or h doit être négatif entre 0 et z_1 (b négatif) ; donc, la dérivée de h par rapport à z doit être positive dans cette zone, donc d'après (74) $j(z,t)$ doit être négatif dans cette zone ; en particulier, dans (G.1), $j(0,t)$ doit être négatif, donc $z_1'(t)$ est positif. z_1 se déplace vers la droite, et nous prendrons pour instant 0 l'instant où $z_1 = 0$.

A cet instant $h(0,0) = 0$ puisque z_1 est un point d'inversion de b et on a vu qu'ensuite $h(z,t)$ devient négatif. Or $h(0,t)$ est une loi sinusoïdale : c'est la d.d.p.m. tangentielle provoquée par la f.m.m. du stator, déduction faite des ampères-tours magnétisants. Donc $h(0,t)$ suit la loi :

$$h(0,t) = -H_0\sqrt{2}\sin\omega_0 t \qquad (G.2)$$

Revenons à l'étude de j.

En vertu de (75), $j(z,t)$ est indépendant de z pour $0 < z < z_1$. Donc, dans cet intervalle, on peut écrire d'après (G 1) :

(G.3) $$-\rho j(z,t) = 2B_0\sqrt{2}\, z'_1(t)$$

de (74), il résulte alors, pour $0 < z < z_1$:

$$\frac{\partial h(z,t)}{\partial z} = \frac{2B_0\sqrt{2}}{\rho} z'_1(t)$$

soit, en intégrant et tenant compte de (G.2) :

(G.4) $$h(z,t) = \frac{2B_0\sqrt{2}}{\rho} z.z'_1(t) - H_0\sqrt{2}\sin\omega_0 gt \quad (0 < z < z_1)$$

Sachant que pour $z = z_1$ on doit avoir $h = 0$, il vient l'équation donnant z_1 :

$$\frac{2B_0\sqrt{2}}{\rho} z_1(t)\, z'_1(t) = H_0\sqrt{2}\sin\omega_0 gt$$

qui s'intègre aisément car :

$$z_1 = z'_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{z_1^2}{2}\right)$$

La constante d'intégration est obtenue par la condition $z_1(0) = 0$

(G.5) $$z_1(t) = \sqrt{\frac{\rho H_0\sqrt{2}}{\omega_0 g B_0\sqrt{2}}(1-\cos\omega_0 gt)} = \sqrt{\frac{2\rho H_0\sqrt{2}}{\omega_0 g B_0\sqrt{2}}}\cdot\sin\frac{\omega_0 gt}{2}$$

$z_1(t)$ varie donc de 0 pour $t = 0$ jusqu'à un maximum pour $\omega_0 gt = \pi$, ce maximum est $z_2 = \delta_s$ avec :

(G.6) $$\boxed{\delta_s = \sqrt{\frac{2\rho H_0\sqrt{2}}{\omega_0 g B_0\sqrt{2}}}}$$

On s'aperçoit que l'équation (G.6) présente une grande ressemblance avec (76) ; la quantité $\mu_0\mu$ est remplacée par le rapport

$$\frac{B_0\sqrt{2}}{H_0\sqrt{2}}$$

entre l'induction de saturation et le champ tangentiel maximal.

Notons tout de suite que l'expression (G 5) n'est valable que pour $0 < \omega_0 gt < \pi$, il restera à établir l'expression de $z_1(t)$ pour $\pi < \omega_0 gt < 2\pi$.

Pendant cette première demi-période, on a donc :

$$z_1(t) = \delta_s \sin \frac{\omega_0 g t}{2} \tag{G.7}$$

$$z_1'(t) = \frac{\delta_s \omega_0 g}{2} \cos \frac{\omega_0 g t}{2} \tag{G.8}$$

d'où, en reportant dans (G 3) et (G 4) et utilisant (G 6) :

$$j(z,t) = -\frac{2H_0\sqrt{2}}{\delta_s} \cos \frac{\omega_0 g t}{2} \tag{G.9}$$

$$h(z,t) = \frac{2H_0\sqrt{2}}{\delta_s} z \cos \frac{\omega_0 g t}{2} - H_0\sqrt{2} \sin \omega_0 g t \tag{G.10}$$

Les équations (G 9) et (G 10) ne sont en outre valables que pour $0 < z < z_1$, au-delà j et h sont nuls.

Après l'instant $t = \frac{\pi}{\omega_0 g}$, z_1 ne peut continuer à suivre la loi (G 7) c'est-à-dire se mettre à décroître. En effet, au temps $t = \frac{\pi}{\omega_0 g}$, l'induction à la répartition de la fig. G 2, z_1 est confondu avec δ_s et si z_1 se met à décroître, le profil de l'induction sera celui de la fig. G 1 ; or, nous avons démontré qu'à ce profil correspond nécessairement $z_1'(t) > 0$, ce qui est contradictoire avec (G 8) pour

$$t > \frac{\pi}{\omega_0 g}$$

En outre, à ce moment $h(0,t)$ devient positif ce qui est également contradictoire avec la fig. G.1.

Donc, pendant cette deuxième demi-période z_1 repart de zéro et le profil de l'induction commence à se déformer comme indiqué fig. G.3, ce qui assure la continuité du flux par rapport au temps.

C'est maintenant que l'on constate que dans la zone comprise entre z_1 et δ_s, $|b|$ a nécessairement pour valeur $B_0\sqrt{2}$, justifiant a posteriori notre hypothèse de départ.

Les équations sont modifiées comme suit :

(G.3) devient $\rho j(z,t) = 2B_0\sqrt{2}\, z_1'(t)$

et en suivant les conséquences de ce changement de signe, il vient, pour :

$$\frac{\pi}{\omega_0 g} < t < \frac{2\pi}{\omega_0 g}$$, que :

(G.7) devient : $\zeta_1(t) = -\delta_s \cos \frac{\omega_0 g t}{2}$

(G.8) devient : $\zeta_1'(t) = \frac{\delta_s \omega_0 g}{2} \sin \frac{\omega_0 g t}{2}$

et pour la même demi-période et $0 < \zeta < \zeta_1$:

(G.9) devient : $j(\zeta, t) = \frac{2 H_0 \sqrt{2}}{\delta_s} \sin \frac{\omega_0 g t}{2}$

(G.10) devient : $h(\zeta, t) = -\frac{2 H_0 \sqrt{2}}{\delta_s} \zeta \sin \frac{\omega_0 g t}{2}$

$$- H_0 \sqrt{2} \sin \omega_0 g t$$

par exemple, $j(\zeta, t)$ et $\zeta_1(t)$ suivent les lois représentées fig. 18.

G.3. CALCUL DES PERTES ACTIVES.

Il suffit de les calculer pendant la première demi-période.

A l'instant t la densité de courant a pour valeur (G.9) et existe sur une profondeur $\zeta_1(t)$ donnée par (G.7), donc la puissance dissipée par unité de surface a pour valeur à l'instant t :

$$\frac{p}{S} = \rho J^2 \zeta_1 = \frac{8 \rho H_0^2}{\delta_s} \cos^2 \frac{\omega_0 g t}{2} \sin \frac{\omega_0 g t}{2}$$

et la puissance moyenne s'obtient en prenant la valeur moyenne sur une demi-période :

$$\frac{P}{S} = \frac{\omega_0 g}{\pi} \frac{8 \rho H_0^2}{\delta_s} \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0 g}} \cos^2 \frac{\omega_0 g t}{2} \sin \frac{\omega_0 g t}{2} \, dt = \frac{16 \rho H_0^2}{3 \pi \delta_s}$$

(G.11)
$$\boxed{\frac{P}{S} = \frac{16 \rho H_0^2}{3 \pi \delta_s}}$$

G.4. CALCUL DES PERTES REACTIVES.

Il faut calculer la valeur moyenne de $\omega_0 g \int b h \, dv$ sur la première demi-période.

A l'instant t, b et h n'existent simultanément que sur la longueur :

$$\zeta_1(t) = \delta_s \sin \frac{\omega_0 g t}{2}$$

b est constant et a pour valeur $= - B_0\sqrt{2}$, h varie linéairement de 0 , où il a la valeur $- H_0\sqrt{2} \sin \omega_0 g t$, à $z_1(t)$ où il a la valeur 0 , donc sa valeur moyenne est :

$$-\frac{H_0\sqrt{2}}{2} \sin \omega_0 g t \quad \text{et la valeur de} \quad \omega_0 g \int b h \, dv$$

à cet instant est donc, par unité de surface :

$$\frac{q}{S} = B_0 H_0 \omega_0 g \delta_s \sin \omega_0 g t \sin \frac{\omega_0 g t}{2}$$

soit en utilisant (G.6) :

$$\frac{q}{S} = \frac{4 \rho H_0^2}{\delta_s} \cos \frac{\omega_0 g t}{2} \sin^2 \frac{\omega_0 g t}{2}$$

Comparant avec $\frac{p}{S}$, on voit que la valeur moyenne sera :

(G.12)

$$\boxed{\frac{Q}{S} = \frac{8 \rho H_0^2}{3 \pi \delta_s}}$$

$Q = \frac{P}{2}$ donc l'impédance équivalente a pour argument :

$$\text{arc tg } \frac{1}{2} = 26,6° .$$

REMARQUE.

On peut aussi déterminer cet argument en calculant le déphasage entre le champ magnétique à la surface $h(0,t)$ et le fondamental du champ électrique à la surface. On trouve également arc $tg^{1/2}$; cette méthode et le résultat correspondant sont signalés en [10] .

Figures G.1
G.2
G.3

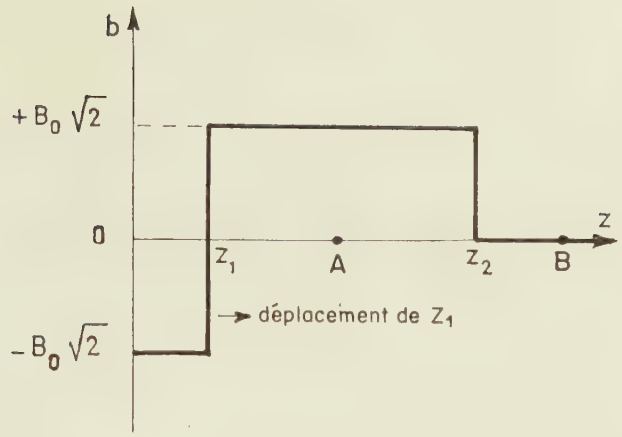


Fig. G.1 – Déplacement du front d'inversion de l'induction au cours de la première demi-période

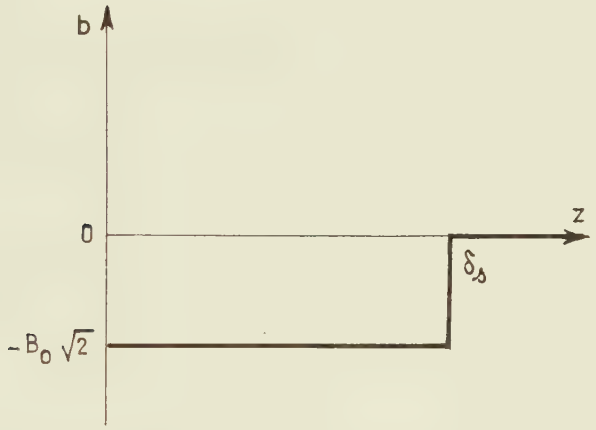


Fig. G.2 – Distribution de l'induction à la fin de la première demi-période

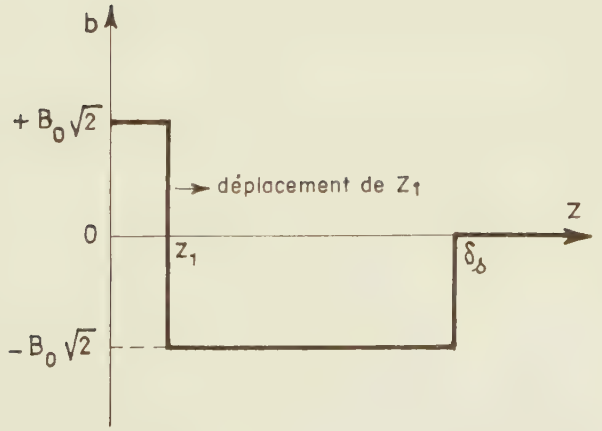


Fig. G.3 – Déplacement du front d'inversion de l'induction au cours de la deuxième demi-période

Annexe H

CALCUL DES PERTES ACTIVES ET REACTIVES, EN ADOPTANT UNE COURBE DE MAGNETISATION RECTANGULAIRE ET EN SUPPOSANT QUE LE FLUX VARIE SINUSOIDALEMENT

H.1. POSITION DU PROBLEME.

Les équations de départ sont toujours les équations (74) et (75), b et h étant liés par la courbe fig. 17.

Nous supposons que le profil de l'induction suit toujours au cours du temps une évolution schématisée par les fig. G.1, G.2 et G.3, d'où une allure de variation de $\delta_1(t)$ du type de celle représentée fig. 18.

Reprenons point par point les calculs de l'Annexe G, mais en raisonnant maintenant à flux sinusoïdal.

Le raisonnement qui avait conduit à conclure que δ_2 est constant au cours du temps reste valable, car indépendant des lois de variations des diverses grandeurs. Cette valeur de δ_2 sera donc, ici encore, appelée δ_s.

H.2. SOLUTION PENDANT LA PREMIERE DEMI-PERIODE $(o < \omega_o g t < \pi)$

En observant les fig. G.1 et G.2, on voit que le flux $\varphi(t)$ a pour expression générale pendant la 1ère demi-période :

$$\varphi(t) = B_o \sqrt{2} \left[\delta_s - 2 \delta_1(t) \right]$$

Sa variation sinusoïdale entraîne :

$$\delta_1(t) = \delta_s \frac{1 - \cos \omega_o g t}{2}$$

On déduit alors $j(o,t)$ de (G.1)

$$j(o,t) = \frac{-\delta_s \omega_o g B_o \sqrt{2} \sin \omega_o g t}{\rho}$$

d'où :

$$j(z,t) \quad \begin{cases} = j(0,t) & \text{pour} \quad 0 < z < z_1(t) \\ = 0 & \text{pour} \quad z > z_1(t) \end{cases}$$

Donc $h(z,t)$ suit, ici encore, une loi linéaire en z :

$$h(z,t) \quad \begin{cases} = h(0,t) - z\, j(0,t) & \text{pour} \quad 0 < z < z_1(t) \\ = 0 & \text{pour} \quad z > z_1(t) \end{cases}$$

$h(0,t)$ est déterminé par la condition $h(z_1,t) = 0$ quel que soit t, d'où :

$$h(0,t) = -\frac{\delta_s^2\, \omega_0\, g}{2\rho}\, B_0 \sqrt{2}\, \sin \omega_0 g t\, (1 - \cos \omega_0 g t) \tag{H.1}$$

On remarque au passage que cette loi n'est pas sinusoïdale de pulsation $\omega_0 g$, ce qui était prévisible.

H.3. SOLUTION PENDANT LA 2ème DEMI-PERIODE ($\pi \leq \omega_0 g t < 2\pi$)

On trouve successivement :

$$\varphi(t) = -B_0 \sqrt{2} \left[\delta_s - 2 z_1(t) \right]$$

$$z_1(t) = \delta_s \frac{1 + \cos \omega_0 g t}{2}$$

$$j(0,t) = \frac{\delta_s\, \omega_0\, g\, B_0 \sqrt{2}\, \sin \omega_0 g t}{2}$$

$$j(z,t) \quad \begin{cases} = j(0,t) & \text{pour} \quad 0 < z < z_1(t) \\ = 0 & \text{pour} \quad z > z_1(t) \end{cases}$$

$$h(z,t) \quad \begin{cases} = h(0,t) - z\, j(0,t) & \text{pour} \quad 0 < z < z_1(t) \\ = 0 & \text{pour} \quad z > z_1(t) \end{cases}$$

$$h(0,t) = -\frac{\delta_s^2\, \omega_0\, g}{2\rho}\, B_0 \sqrt{2}\, \sin \omega_0 g t\, (1 + \cos \omega_0 g t)$$

Ce paragraphe est seulement destiné à permettre, le cas échéant, le tracé des différentes courbes et à reconnaître que les calculs énergétiques peuvent être effectués en se bornant à la première demi-période.

H.4. CALCUL DE δ_s

Si dans l'équation (H.1) on fait $\omega_o g t = \frac{\pi}{2}$, il vient :

$$h\left(o, \frac{\pi}{2\omega_o g}\right) = -\frac{\delta_s^2 \omega_o g B_o \sqrt{2}}{2\rho}$$

Donc, δ_s s'exprime en fonction de ω_o, g, $B_o\sqrt{2}$, ρ et de la valeur atteinte par le champ à cet instant. Pour être homogène avec le § 1.4, il est préférable d'introduire l'amplitude $H_o\sqrt{2}$ du fondamental de la décomposition de $h(o,t)$ en série de Fourier et on trouve par un calcul simple :

$$H_o\sqrt{2} = \left| 1{,}087\, h\left(o, \frac{\pi}{2\omega_o g}\right) \right| \quad \text{d'où}$$

(H.2)
$$\delta_s = \sqrt{\frac{2\rho H_o\sqrt{2}}{1{,}087\,\omega_o g B_o\sqrt{2}}}$$

H.5. CALCUL DE $\frac{P}{S}$

Par la même méthode qu'au § 1.4, on intègre ρj^2, d'abord par rapport à z à l'instant t, puis on calcule la valeur moyenne sur une demi-période; il vient :

(H.3)
$$\frac{P}{S} = \frac{2\rho H_o^2}{1{,}18\,\delta_s}$$

H.6. CALCUL DE $\frac{Q}{S}$

Par la même méthode qu'au § 1.4, on intègre $\omega_o g\, b\, h$, d'abord par rapport à z à l'instant t, puis on calcule la valeur moyenne sur une demi-période, il vient :

(H.4)
$$\frac{Q}{S} = \frac{8\rho H_o^2}{1{,}18 \times 3 \times \pi\, \delta_s}$$

H.7. CONCLUSION.

La comparaison de (H.2), (H.3), (H.4) avec (G.6), (G.11) et (G.12) respectivement, montre que les résultats obtenus dans les deux hypothèses (champ sinusoïdal ou flux sinusoïdal) ne sont pas sensiblement différents.

Comme la réalité se situe nécessairement entre ces deux hypothèses extrêmes, puisque le champ est l'image du courant, alors que le flux est l'image de la tension, on peut conclure que le rotor massif, en régime saturé, peut être caractérisé par les puissances actives et réactives, dont les expressions ont été calculées et perfectionnées au cours du présent chapitre comme si le circuit correspondant était non déformant et respectait le caractère sinusoïdal des grandeurs appliquées, et on adoptera, comme expressions numériques, celles rassemblées dans le tableau I du chapitre 1 de la 2ème partie.

BIBLIOGRAPHIE

(1) PARK R. H. - "Two Reaction Theory of Synchronous Machines" Transactions A I E E 1929, vol. 48, p. 716-727.

(2) CONCORDIA C. - "Synchronous Machines Theory and Performance" - Livre édité chez John Wiley, 1951.

(3) ADKINS B. - "The general Theory of Electrical Machines", Livre édité chez Chapman et Hall 1959.

(4) CANAY M. - "Ersatzschemata der Synchronmaschine sowie Vorausberechnung der Kenngrossen mit Beispielen" - Thèse présentée à l'Ecole Polytechnique de Lausanne, septembre 1969.

(5) CANAY M. - "Schémas équivalents de la machine synchrone pour le calcul des constantes de la roue polaire, dans le cas de phénomènes non stationnaires et de la marche asynchrone. Première partie : Turboalternateurs" Revue BBC n° 2, 1969, p. 60-71.

(6) CONCORDIA C. et PORISKY H. "Synchronous Machine with Solid cylindrical Rotor" - A I E E Transactions (Electrical Engineering) Vol. 56, janvier 1937, p. 49-58 et 179.

(7) CONCORDIA C. - "Synchronous machine with solid Cylindrical Rotor" - A I E E Transactions, février 1960, p. 1650-1657.

(8) WOOD A. J. - "An Analysis of solid Rotor Machines Part. I Operationel Impedances and Equivalent Circuits"
A I E E Transactions février 1960, p. 1657-1665.

(9) WOOD A. J. et CONCORDIA C. "An analysis of solid Rotor machines Part. II The effects of Curvature"
Transactions A I E E - Février 1960, p. 1666-1673.

(10) BHARALI P. et ADKINS B. - "Operational Impedances of Turbogenerators with solid Rotors" - Proceedings I E E, vol. 110, n° 12, décembre 1963, p. 2185 - 2199.

(11) JACKSON W.B. et WINCHESTER R.L. - "Direct and quadrature - Axis equivalent circuits for solid Rotor Turbine generators" -
I E E E Transactions on Power Apparatus and Systems - Vol. PAS - 88 n° 7 juillet 1969, p. 1121 - 1136.

(12) SCHULZ R.P., JONES W.D. et EWART D.N. - "Dynamic models of turbine generators Derived from solid Rotor Equivalent circuits"
I E E E Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 92 mai-juin 1973 - p. 926-933.

(13) CURTARELLI F. et MOLINARI G. "Dynamic Behaviour of A. C. generators with solid Rotor" - Publié par l'Instituto di Elettrotechnica, Université de Gênes, Italie - juin 1970.

(14) BARRET P. G. et ROQUEFORT Y.M. - "Calculation and measurement of Frequency Response of large turbogenerators in the presence of small disturbances" I E E E Transactions on Power Apparatus and Systems - Vol. PAS 92 juillet-août 1973, p. 1348-1357.

(15) KANT M. et BONNEFILLE R. - "Moteur linéaire à induction" - Techniques de l'Ingénieur D. 551 1971.

(16) BARRET Ph., ROQUEFORT Y. - "Calcul et mesure de la réponse fréquencielle des grands turboalternateurs vis-à-vis des petites perturbations". Note interne Etudes et Recherches E.D.F. n° HM. 10.058 du 13.12.1972 (texte français de [14] , et compléments).

(17) Ph. BARRET - "Electrotechnique générale" - Tome IV - Régimes transitoires des machines tournantes" - Cours à l'Ecole Supérieure d'Electricité n° 2372 - Edition 1974.

(18) C. BARBIER, Ph. BARRET, G. PIOGER, P. SAPET. - Utilisation des calculatrices numériques pour l'étude de la stabilité des réseaux de transport d'énergie - R.G.E. juillet-août 1968, p. 719-736.

(19) A.W. RANKIN - Per-umit impedances of synchronous machines - Trans. AIEE Août 1945, p. 569-573 et décembre 1945, p. 839-841.

(20) P.D. AGARWAL - Eddy Current losses in solid and laminated iron. A.I.E.E. Trans. 79 (1959) p. 169-181.

(21) F. MAURY -"Essais de marche asynchrone sur turboalternateurs de 156 MVA. Résultats et interprétation" R.G.E. janvier 1966, p. 41-52.

Imp. LES PROCÉDÉS DOREL – Paris